

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. П. Шпачук, М. А. Засядько

Конспект лекцій

з курсу

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

СПЕЦКУРС

Частина 2

*(для студентів 4-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.060101 – Будівництво)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2016

Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» Спецкурс. Частина 2 (для студентів 4-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – Будівництво) / В. П. Шпачук, М. А. Засядько; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова. – 2016. – 122 с.

Автори: В. П. Шпачук
М. А. Засядько

Рецензент: канд. техн. наук, доц. О. О. Чупринін

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол №5 від 18.11.15

Зміст

1 Розрахунок стержневих систем на рухоме навантаження.....	6
1.1 Методи визначення зусиль від рухомого навантаження. Лінії впливу.....	6
1.1.1 Основні поняття. Лінії впливу в однопрогонній балці.....	6
1.1.2 Визначення зусиль за лініями впливу.....	10
1.1.3 Особливості побудови ліній впливу при вузловій передачі навантаження.....	15
1.1.4 Побудова обвідних епюр.....	17
Запитання для самоконтролю.....	20
1.2 Особливості побудови ліній впливу для стержневих систем.....	21
1.2.1 Лінії впливу для ферм.....	21
1.2.2 Лінії впливу реакцій і внутрішніх зусиль у тришарнірній арці.....	27
Запитання для самоконтролю.....	30
1.3 Інші випадки побудови ліній впливу.....	31
1.3.1 Лінії впливу переміщень.....	31
1.3.2 Лінії впливу у статично невизначуваних системах.....	32
Запитання для самоконтролю.....	37
2 Стійкість стержневих систем.....	37
2.1 Основні поняття.....	37
2.1.1 Визначення.....	37
2.1.2 Ступені вільності.....	40
Запитання для самоконтролю.....	40
2.2 Методи розрахунку на стійкість.....	41
2.2.1 Динамічний метод.....	41
2.2.2 Енергетичний метод.....	41
2.2.3 Статичний метод.....	43
Запитання для самоконтролю.....	46
2.3 Стійкість прямого стиснутого стержня.....	46
2.3.1 Стійкість прямого стиснутого стержня з шарнірним закріпленням кінців. Формула Ейлера.....	46
2.3.2 Критична сила для прямого стиснутого стержня при різних закріпленнях кінців.....	49
2.3.3 Критичні напруження. Стійкість за межею пружності.....	50
2.3.4 Розрахунок стержнів на стиск з урахуванням стійкості.....	52
2.3.5 Метод початкових параметрів.....	53

2.3.6 Деформаційний розрахунок стержнів.....	56
Запитання для самоконтролю.....	57
2.4 Наближені методи розрахунку на стійкість.....	58
2.4.1 Метод Рітца-Тимошенка.....	58
2.4.2 Метод Бубнова-Гальоркіна.....	60
2.4.3 Метод скінченних різниць.....	62
Запитання для самоконтролю.....	64
2.5 Стійкість рам.....	65
2.5.1 Розрахунок рам на стійкість методом переміщень.....	65
2.5.2 Допоміжна задача методу переміщень. Визначення реакцій у окремому стиснуто-зігнутому стержні.....	67
2.5.3 Поняття про розрахунок рам на стійкість методом сил.....	82
2.5.4 урахування симетрії при розрахунку рам на стійкість.....	83
Запитання для самоконтролю.....	84
2.6 Стійкість колових арок та кілець.....	84
2.6.1 Диференціальне рівняння згину кривого бруса.....	84
2.6.2 Стійкість двошарнірної арки.....	86
2.6.3 Стійкість безшарнірної арки.....	87
2.6.4 Стійкість тришарнірної арки.....	89
2.6.5 Стійкість колових кілець.....	90
Запитання для самоконтролю.....	91
2.7 Поняття про стійкість плоскої форми згину.....	91
3 Динаміка стержневих систем.....	93
3.1 Основні поняття.....	93
3.1.1 Динамічні впливи.....	94
3.1.2 Сили, що супроводжують коливання.....	95
3.1.3 Методи динаміки споруд.....	96
3.1.4 Ступені вільності динамічної системи.....	97
Запитання для самоконтролю.....	98
3.2 Вільні коливання систем з одним ступенем вільності.....	98
3.2.1 Диференціальне рівняння руху.....	98
3.2.2 Вільні коливання без опору.....	99
3.2.3 Вільні коливання з опором.....	102
Запитання для самоконтролю.....	103
3.3 Власні коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності.....	104
Запитання для самоконтролю.....	107

3.4 Вимушені коливання систем з одним ступенем вільності.....	109
3.4.1 Рівняння руху. Частинні випадки збуджуючого навантаження.....	109
3.4.2 Вимушені коливання при дії періодичного збуджуючого навантаження.....	110
3.4.3 Зусилля від динамічних впливів. Динамічний коефіцієнт.....	113
Запитання для самоконтролю.....	114
3.5 Вимушені коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності.....	114
3.5.1 Коливання при дії гармонічного навантаження.....	114
3.5.2 Загальний випадок дії збуджуючого навантаження. Розкладання за формами вільних коливань.....	116
3.5.3 Кінематичне збудження коливань Розрахунок на сейсмічні впливи.....	119
Запитання для самоконтролю	120
Список джерел.....	121

1 Розрахунок стержневих систем на рухоме навантаження

1.1 Методи визначення зусиль від рухомого навантаження. Лінії впливу

1.1.1 Основні поняття. Лінії впливу в однопрогонній балці

Рухоме навантаження з часом змінює своє положення на споруді (навантаження від мостового крану, автомобіля, залізничного рухомого складу та ін.). Таке навантаження в розрахунковій схемі можна зобразити у вигляді окремої зосередженої сили, що переміщується, зосередженого моменту, розподіленого навантаження або системи зв'язаних між собою навантажень, зокрема, зосереджених сил.

Переміщення навантаження по споруді, як правило, пов'язане з появою сил інерції, для визначення яких користуються методами динаміки споруд. У багатьох випадках силами інерції при розрахунках на рухоме навантаження можна знехтувати, тобто вважати навантаження прикладеним статично. Далі розглядається розрахунок саме на таке, статично прикладене рухоме навантаження.

Зміна положення навантаження викликає зміну зусиль у споруді не тільки від одного перерізу до іншого, але й в одному перерізі. У зв'язку з цим при розрахунку на рухоме навантаження виникає необхідність визначення найбільших (найменших) зусиль в перерізах. Цю задачу можна розв'язати за допомогою *обвідних епюр*. Останні являють собою графіки, на яких показано межі зміни якого-небудь зусилля в усіх перерізах при будь-яких можливих завантаженнях системи. Всі епюри відповідного зусилля, наприклад, згинаючого моменту, будуть розташовуватися всередині цих меж. Для побудови обвідної епюри необхідно побудувати епюри для постійного і кожного тимчасового навантаження, за допомогою цих епюр знайти розрахункові найбільші й найменші зусилля в кожному перерізі і за ними побудувати обвідну епюру.

Такий розрахунок є трудомістким навіть при наявності рухомого навантаження тільки одного виду тому, що потребує побудови великої кількості епюр для різних положень рухомого навантаження. У зв'язку з цим метод обвідних епюр в описаному вище вигляді застосовується, як правило, лише у тих випадках, коли інші методи використати не можна, наприклад, при розрахунку нелінійно деформованих систем. При розрахунку лінійно

деформованих систем на рухоме навантаження великого поширення набув *метод ліній впливу*. Цей метод зокрема можна використати і для побудови обвідних епюр.

Лінією впливу називають графік, що виражає залежність якого-небудь фактора (реакції опори, зусилля у фіксованому перерізі, переміщення точки споруди та ін.) *від положення на споруді одиничної сили постійного напрямку*. Для порівняння нагадаємо, що *епюрою називають графік залежності якого-небудь фактора* (внутрішнього зусилля, переміщення і т.п.) *уздовж осей споруди від заданого нерухомого навантаження*. Отже в епюрі аргументом є змінна, що визначає положення перерізу, в якому обчислюється фактор, а навантаження нерухоме. На відміну від епюри в лінії впливу переріз, в якому обчислюється фактор, залишається нерухомим, а аргументом є змінна, що визначає положення навантаження (одиничної сили) на споруді. У зв'язку з цим зазначимо, що коли поняття "епюра опорної реакції" є нісенітницею (реакція діє у фіксованому перерізі, що проходить через опорний стержень), лінію впливу опорної реакції неважко уявити (див. далі).

Застосування ліній впливу має сенс тільки для лінійно деформованих систем. У таких системах неважко перейти від одиничного зусилля (зусилля від одиничної сили) до зусилля від заданої сили, а принцип незалежності дії сил дає змогу простим підсумовуванням одержати зусилля від сумісної дії ряду навантажень.

Розрахунок на рухоме навантаження методом ліній впливу поділяється на дві частини: побудова ліній впливу і визначення зусиль за лініями впливу. Для побудови ліній впливу переважно застосовують статичний метод.

В основному навантаженням у спорудах є сила ваги, тому звичайно при побудові ліній впливу навантаження беруть у вигляді одиничної сили, спрямованої вертикально донизу – *одиничний вантаж*. Лінія, уздовж якої одиничний вантаж переміщується на споруді, називається *вантажною лінією*.

Покажемо застосування статичного методу для побудови ліній впливу в однопрогінній балці. У балці, показаній на рисунку 1, а, побудуємо *лінію впливу реакції R_B* . Для цього поставимо одиничну силу F у довільне положення, що визначається координатою x , і запишемо умову рівноваги балки:

$$\sum M_A = 0, \quad -F \cdot x + R_B \cdot l = 0.$$

Звідси маємо $R_B = F \cdot x / l$ або:

$$R_B = x / l. \quad (1)$$

Оскільки вираз (1) встановлює лінійний зв'язок між реакцією і положенням одиничного

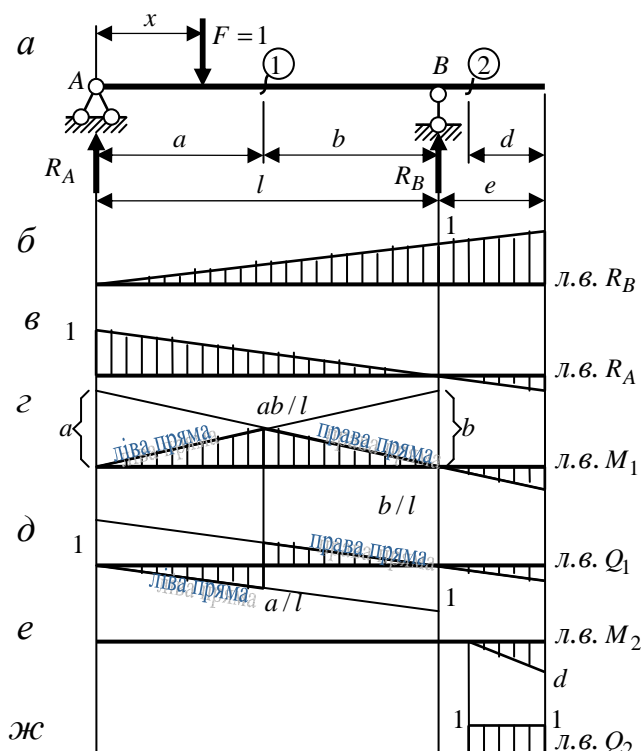


Рисунок 1

вантажу, для побудови графіку виберемо дві будь-які точки, наприклад, $x=0$ та $x=l$. Відповідні значення реакції - $R_B=0$ і $R_B=1$. Відклавши у обраному масштабі ці значення від горизонтальної осі під балкою, проводимо пряму через одержані точки (рис. 1, б). Це і є шукана лінія впливу R_B .

Зупинимось на фізичній суті ординат побудованої лінії впливу. Як виходить з визначення, кожна ордината цієї лінії впливу являє собою значення опорної реакції R_B ,

викликаної одиничною силою, розташованою на вантажній лінії над цією ординатою.

Аналогічно будуємо лінію впливу другої реакції – R_A :

$$\sum M_B = 0, R_A \cdot l - F(l - x) = 0.$$

Звідси $R_A = F \cdot (l - x) / l$ або

$$R_A = (l - x) / l. \quad (2)$$

При $x=0$ $R_A=1$, при $x=l$ $R_A=0$.

Проведена через ці точки пряма є лінією впливу R_A (рис. 1, в). На кінці консолі (при $x=l+c$) вона має ординату

$$R_A = \frac{l - (l + c)}{l} = -\frac{c}{l}.$$

Це значення, як і значення при будь-якому іншому розташуванні одиничної сили можна одержати також з подоби трикутників.

Перейдемо до побудови ліній впливу внутрішніх зусиль в балці. При обчисленні внутрішніх зусиль методом перерізів розглядають сили, розташовані на одній з відсічених частин. Залежно від того, знаходиться одинична сила на розглядуваній частині балки чи на протилежній, вона увійде або ні у вираз для внутрішнього зусилля. Звідси виходить, що вирази для

внутрішнього зусилля будуть різними при положеннях одиничного вантажу ліворуч чи праворуч від перерізу і ці випадки розташування рухомого навантаження треба розглядати окремо.

Покажемо побудову *лінії впливу згинаючого моменту* в перерізі I тієї самої балки. При розташуванні одиничного вантажу *ліворуч* від перерізу K $0 \leq x \leq a$. Розглядаючи рівновагу правої частини балки, знаходимо $M_1 = R_B \cdot b$, або, з урахуванням виразу (1),

$$M_1 = x \cdot b / l. \quad (3)$$

Графік рівняння (3) – це пряма, що проходить через точки $x = 0, M_1 = 0$; $x = a, M_1 = a \cdot b / l$ (рис. 1, ε). Цю пряму називають *лівою прямою*.

При розташуванні одиничного вантажу *праворуч* від перерізу I $a \leq x \leq l + c$. У цьому випадку зручніше розглядати рівновагу лівої частини балки: $M_1 = R_A \cdot a$, або, з урахуванням виразу (2),

$$M_1 = a(l - x) / l. \quad (4)$$

При $x = 0$ $M_1 = a(l - a) / l = a \cdot b / l$, при $x = l$ $M_1 = 0$. Через ці дві точки проводимо *праву пряму* (рис. 1, ε). Отже, лінію впливу M_1 побудовано.

Відзначимо, що будь-яка ордината лінії впливу M_1 являє собою величину згинаючого моменту в перерізі I при розташуванні одиничного вантажу над цією ординатою.

Побудуємо *лінію впливу поперечної сили* в перерізі I .

Вантаж розташований *ліворуч* від перерізу I : $0 \leq x \leq a$. Розглядаючи рівновагу правої частини балки, одержуємо $Q_1 = -R_B$, або, з урахуванням (1),

$$Q_1 = -x / l. \quad (5)$$

При $x = 0$ $Q_1 = 0$, при $x = a$ $Q_1 = -a / l$. Через ці точки на рисунку 1, δ проведено *ліву пряму* лінії впливу Q_1 .

Вантаж розташований *праворуч* від перерізу I : $a \leq x \leq l + c$. З умови рівноваги лівої частини $Q_1 = R_A$ або, з урахуванням (2),

$$Q_1 = (l - x) / l. \quad (6)$$

При $x = a$ $Q_1 = (l - a) / l = b / l$; при $x = l$ $Q_1 = 0$. Провівши через ці дві точки *праву пряму*, закінчуємо побудову лінії впливу Q_1 (рис. 1, δ).

Кожна ордината цієї лінії впливу дає величину поперечної сили в перерізі I при розташуванні одиничної сили на вантажній лінії над цією ординатою.

Побудовані лінії впливу мають характерні особливості, що дають змогу досить просто будувати їх без запису рівнянь. Дійсно, лінія впливу опорної

реакції є пряма, що має ординату одиниця під тією опорою, де діє ця реакція, а під протилежною опорою – нуль.

Ліві й праві прямі на лініях впливу внутрішніх зусиль проходять через нулі під одноіменними опорами. Ліва й права прямі на лінії впливу згинаючого моменту перетинаються під перерізом і при продовженні відсікають під опорами ординати, що чисельно дорівнюють відстаням від цих опор до перерізу.

Ліва й права прямі на лінії впливу поперечної сили паралельні і при продовженні відсікають під опорами ординати $+1$ і -1 .

Зазначимо, що перелічені властивості ліній впливу внутрішніх зусиль мають місце при розташуванні перерізу в прогоні балки. Для перерізів у консольній частині лінії впливу M і Q мають інший характер (див. лінії впливу M_2 та Q_2 на рис. 1, *е, ж*), хоча й тут взаємне розташування лівої і правої прямих задовольняє тим самим умовам. Справді, ліва (нульова) пряма на лінії впливу M_2 перетинається з правою прямою під перерізом 2, а ліва (нульова) і права прямі лінії впливу Q_2 паралельні одна одній.

Зупинимось на розмірностях ординат побудованих ліній впливу. Як виходить з виразів (1)...(6), ординати ліній впливу опорних реакцій і поперечної сили є безрозмірними величинами, а ординати ліній впливу згинаючого моменту виражаються одиницями довжини. Від звичайних розмірностей відповідних зусиль одиниці виміру цих ординат відрізняються відсутністю розмірності сили. Формально це можна пояснити тим, що одинична сила, від якої будуються лінії впливу, є величина, яка не має розмірності.

1.1.2 Визначення зусиль за лініями впливу

Обчислення зусиль від заданого навантаження за лініями впливу називають *завантаженням ліній впливу*. Завантаження здійснюється за одними правилами незалежно від того, для якого конкретно зусилля і в якій споруді побудовано дану лінію впливу. Тому розглядатимемо завантаження лінії впливу довільного зусилля S (в загальному випадку криволінійної).

Спочатку покажемо обчислення зусиль за лініями впливу від різних нерухомих навантажень.

Нерухома зосереджена сила F . За визначенням ордината у лінії впливу S , розташована під силою F , являє собою зусилля \bar{S} від цієї одиничної сили. При заданому значенні сили F достатньо збільшити зусилля \bar{S} у F разів:

$$S = y \cdot F. \quad (7)$$

Отже, зусилля від зосередженої сили дорівнює добутку цієї сили на розташовану під нею ординату відповідної лінії впливу. Сила, спрямована донизу береться додатною, а ординату під силою необхідно брати з урахуванням її знаку.

Нерухоме розподілене навантаження $q(x)$ (рис. 2,а). Виділимо на відстані x нескінченно малу ділянку навантаження завдовжки dx і замінімо його рівнодіючою $q(x)dx$. Скориставшись формулою (7), одержимо зусилля dS від цього елементарного навантаження:

$$dS = q(x) y(x) dx.$$

Для визначення повного зусилля S проінтегруємо обидві частини цього виразу за довжиною дії навантаження $q(x)$:

$$S = \int_a^b q(x) y(x) dx. \quad (8)$$

Під інтегралом у правій частині (8) стоїть добуток двох функцій: $q(x)$ та $y(x)$, як і в інтегралі Мора ($\int \bar{M} M dx$). Тому для обчислення інтегралу можна застосувати відомі прийоми перемноження епюр. Наприклад, якщо одна з функцій - $q(x)$ або $y(x)$ - лінійна, можна скористатися правилом Верещагіна. Якщо підінтегральна функція $q(x) y(x)$ являє собою поліном не більше, ніж третьої степені, точне значення інтегралу можна одержати за допомогою формули Сімпсона.

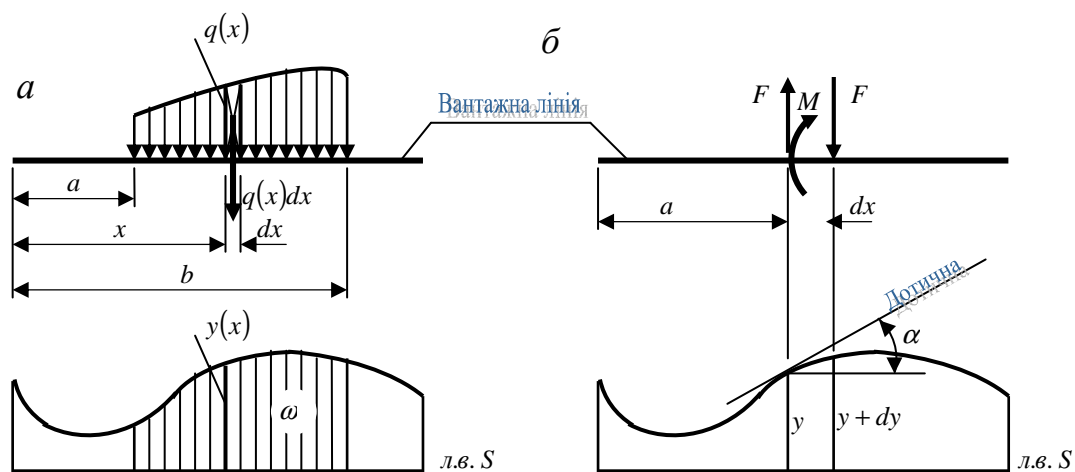


Рисунок 2

У випадку рівномірно розподіленого навантаження $q(x) = q = const$ вираз (8) набуває такого вигляду:

$$S = q \int_a^b y(x) dx. \quad (9)$$

Інтеграл у правій частині (9) являє собою площу ω лінії впливу S , взяту в межах дії навантаження, отже

$$S = q \cdot \omega. \quad (10)$$

Отже, зусилля від рівномірно розподіленого навантаження дорівнює добутку інтенсивності навантаження q на площу ω розташованої в його межах відповідної лінії впливу.

Навантаження спрямоване донизу вважається додатним, а площа береться з урахуванням знаку лінії впливу.

Нерухомий зосереджений момент M (рис. 2,б). Подамо заданий момент у вигляді пари сил з нескінченно малим плечем dx . Величина сили, що складає пару становить $F = M / dx$. Тепер скористаємося формулою (7) з урахуванням принципу незалежності дії сил. Одержуємо

$$S = -F \cdot y + F(y + dy) = F dy.$$

Підставляючи силу $F = \frac{M}{dx}$, знайдемо $S = M \frac{dy}{dx}$ або

$$S = M \operatorname{tg} \alpha, \quad (11)$$

де α - кут нахилу дотичної до лінії впливу в точці прикладання зосередженого моменту M .

Отже, зусилля від зосередженого моментна дорівнює добутку величини моментна M на тангенс кута α нахилу дотичної до лінії впливу у точці прикладання моменту.

Знак кута α визначають за звичайними правилами: якщо дотична до лінії впливу проходить через першу або третю чверті координатної площини, кут її нахилу додатний, якщо через другу або четверту – від'ємний. Момент вважається додатним, якщо він спрямований за годинниковою стрілкою.

Спільна для різних нерухомих навантажень. При завантаженні m зосередженими силами, n розподіленими навантаженнями і t зосередженими моментами скористаємося принципом незалежності дії сил. Тоді одержимо:

$$S = \sum_{i=1}^m F_i \cdot y_i + \sum_{j=1}^n q_j \cdot \omega_j + \sum_{k=1}^t M_k \cdot \operatorname{tg} \alpha_k. \quad (12)$$

При завантаженні ліній впливу **рухомих навантаженням** звичайно ставиться завдання визначити розрахункове (найбільше чи найменше) зусилля. При цьому постає питання про положення рухомого навантаження, при якому шукане зусилля буде найбільшим чи найменшим. Ці положення навантаження називають *невигідними* або *небезпечними*. Найбільше зусилля визначають при завантаженні додатної лінії впливу (додатної ділянки лінії впливу), а найменше зусилля – при завантаженні від'ємної лінії впливу (від'ємної ділянки лінії

впливу). Оскільки ці випадки відрізняються один від одного тільки знаком зусилля, далі розглядатимемо визначення лише найбільшого зусилля.

Обчислення найбільшого зусилля істотно залежить не тільки від виду рухомого навантаження, але й від обрису лінії впливу. Розглянемо деякі випадки завантаження.

Завантаження лінії впливу довільного обрису рухомою зосередженою силою. Розв'язок в цьому випадку одержуємо просто. Згідно з (7) при положенні сили F над деякою ординатою y маємо:

$$S = F \cdot y,$$

але оскільки $F = const$, найбільшому значенню S відповідає положення сили над найбільшою ординатою y_{\max} відповідної лінії впливу:

$$S_{\max} = F \cdot y_{\max}. \quad (13)$$

Завантаження лінії впливу ламаного обрису рухомою системою сил (рис. 3). Під рухомою системою розуміють ряд сил, при переміщенні яких, їх значення, напрямок та взаємне розташування залишаються незмінними (навантаження від автомобіля, потягу і т.ін.).

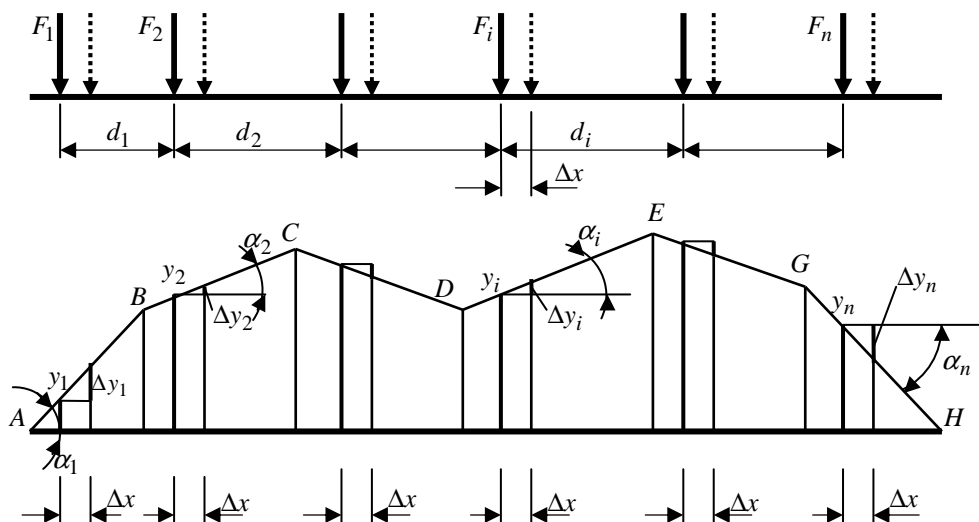


Рисунок 3

Дослідимо характер зміни зусилля S при переміщенні навантаження. Для наведеного на рисунку 3 положення рухомої системи сил зусилля визначається наступним виразом:

$$S = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_i \cdot y_i + \dots + F_n \cdot y_n \quad \text{або} \quad S = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i.$$

Далі зміщуємо систему сил праворуч на деяку відстань Δx (штрихові лінії дії сил на рис. 3) так, щоб кожна сила залишалася в межах того самого відрізка ламаної лінії впливу, на якому вона була до цього. Нове зусилля при зміщеному навантаженні буде таким:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n F_i (y_i + \Delta y_i).$$

Приріст зусилля, викликаний зміщенням сил

$$\Delta S = S_1 - S = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Delta y_i. \quad (14)$$

Оскільки кожна сила переміщувалася в межах прямолінійного відрізка лінії впливу, маємо:

$$\Delta y_i = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (15)$$

Підставивши вираз (15) в (14), матимемо

$$\Delta S = \Delta x \sum_{i=1}^n F_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (16)$$

Аналізуючи рівняння (16), приходимо до висновку, що приріст ΔS залежить тільки від $\operatorname{tg} \alpha_i$, тому його величина може змінитися лише тоді, коли хоча б одна із сил перейде через вершину на другий відрізок ламаної. Зокрема, для зміни знаку ΔS з плюсу на мінус, що відповідає переходу зусилля через максимальне значення, необхідне зменшення хоча б однієї з величин $\operatorname{tg} \alpha_i$. Цій умові на рисунку 3 задовольняють вершини B, C, E, G , що називаються опуклими.

Отже, найбільшому зусиллю S від рухомої системи сил відповідає таке положення навантаження, коли хоча б одна із сил знаходилася над однією з опуклих вершин лінії впливу. Ці сила і вершина називаються критичними.

Обчислення найбільшого зусилля в цьому випадку завантаження зводиться до визначення зусиль при таких положеннях навантаження, коли хоча б одна із сил рухомої системи перебуває над однією з опуклих вершин ліній впливу. З цих значень вибирається найбільше. Практично кількість розглядуваних положень навантаження можна скоротити, відкинувши ті з них, що дають явно менші зусилля.

Завантаження рухомою системою сил лінії впливу трикутного обрису.

Будемо вважати, що небезпечне положення рухомої системи сил відоме – відома критична сила (рис. 4). Рух навантаження зліва направо через небезпечне положення повинен супроводитися зміною знаку приросту зусилля з плюса на мінус. До тих пір, поки при переміщенні навантаження знаходиться ліворуч від небезпечного положення, критична сила разом з розташованими ліворуч від неї

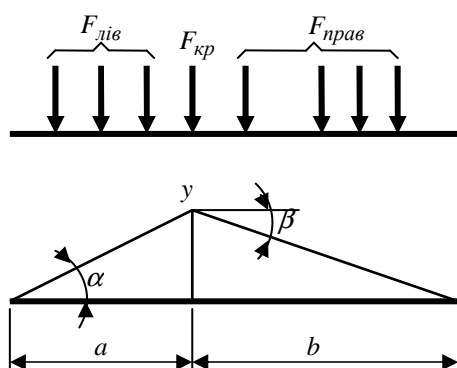
силами знаходиться над лівою прямою лінії впливу, а праві сили – над правою. Тоді відповідно до (16) зміщенню навантаження на Δx відповідає приріст зусилля

$$\Delta S = \Delta x \left[\left(\sum F_{\text{лів}} + F_{\text{кр}} \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha + \left(F_{\text{пр}} \right) \cdot \operatorname{tg} \beta \right] \geq 0. \quad (17)$$

Аналогічно при зміщенні навантаження праворуч від небезпечного положення одержимо

$$\Delta S = \Delta x \left[\left(\sum F_{\text{лів}} \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha + \left(F_{\text{пр}} + F_{\text{кр}} \right) \cdot \operatorname{tg} \beta \right] \leq 0. \quad (18)$$

Замінімо в рівняннях (17) і (18) $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{tg} \beta$ користуючись такими співвідношеннями: $\operatorname{tg} \alpha = y/a$; $\operatorname{tg} \beta = -y/b$. Після перетворень нерівності набувають такого вигляду:



$$\begin{aligned} \frac{\sum F_{\text{лів}} + F_{\text{кр}}}{a} &\geq \frac{\sum F_{\text{пр}}}{b}; \\ \frac{\sum F_{\text{лів}}}{a} &\leq \frac{\sum F_{\text{пр}} + F_{\text{кр}}}{b}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ці нерівності дозволяють шляхом підбору знайти критичну силу, що відповідає максимальному зусиллю від рухомої системи сил.

Після визначення критичної сили треба встановити навантаження в небезпечне положення і, користуючись правилами завантаження ліній впливу нерухомим навантаженням, знайти величину зусилля S_{max} .

1.1.3 Особливості побудови ліній впливу при вузловій передачі навантаження

Розглянемо споруду (рис. 5, а), що складається з балки AB , яка називається *основною*, і *допоміжних* (другорядних) балок 0-1, 1-2, 2-3 і т.д., що опираються на неї. Навантаження прикладене до другорядних балок і передається на основну балку в точках 1, 2, 3, 4, що називаються *вузлами*. При побудові ліній впливу зусиль в основній балці статичним методом з'являються особливості, які покажемо на прикладі лінії впливу згинаючого моменту в перерізі K . У першу чергу подумки відкинемо другорядні балки і, приклавши одиничну силу до основної балки, побудуємо лінію впливу шуканого зусилля.

Для цього, відклавши під перерізом ординату ab/l , проводимо через цю точку і нулі на опорах праву і ліву прямі (тонкі лінії на рис. 5, б). Цю лінію впливу будемо називати основною.

Далі розглянемо положення одиничної сили на одній з другорядних балок, наприклад, на балці 1-2. Розрахунок її виконується незалежно від основної і решти другорядних балок. (рис. 5, в). Знаходимо опорні реакції: $R_1 = (d_2 - x)/d_2$, $R_2 = x/d_2$. Вони однакові за величиною і зворотні за напрямком тиску, що передається від балки 1-2 на основну балку (рис. 5, г). Тиск від інших другорядних балок відсутній тому, що вони не навантажені. Для визначення згинаючого моменту від сил R_1 та R_2 (рис. 5, г) скористаємося побудованою основною лінією впливу. Завантажуючи її, знаходимо

$$M_K = R_1 \cdot y_1 + R_2 \cdot y_2 = \frac{d_2 - x}{d_2} y_1 + \frac{x}{d_2} y_2.$$

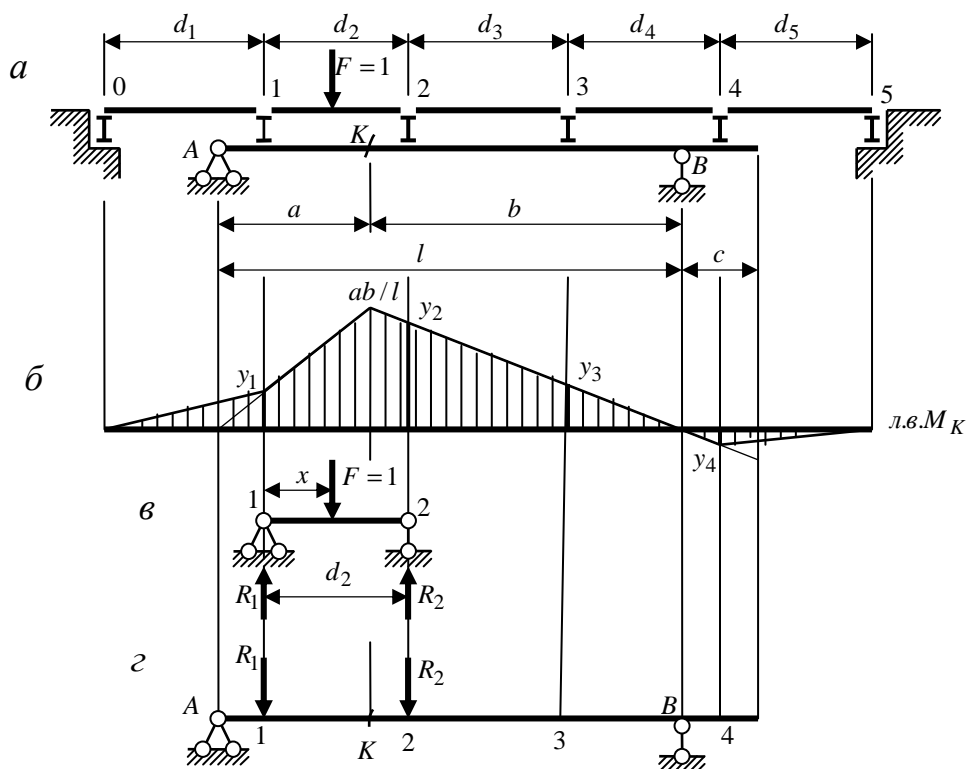


Рисунок 5

При $x=0$ $M_K = y_1$, при $x=d_2$ $M_K = y_2$. Отже, при переміщенні сили на другорядній балці лінія впливу у межах останньої виражається прямолінійним відрізком, що з'єднує ординати лінії впливу основної балки під вузлами. Тоді, виділивши ординати основної лінії впливу під іншими вузлами, в тому числі нульові ординати під вузлами 0 та 5, з'єднаємо їх відрізками прямих. Ці прямі

називають *передаточними прямими*. Одержана ламана лінія є остаточною лінією впливу M_K (рис. 5, б).

Отже, при вузловій передачі навантаження необхідно спочатку побудувати лінію впливу для основної балки, а потім ординати під суміжними вузлами з'єднати передаточними прямими.

1.1.4 Побудова обвідних епюр

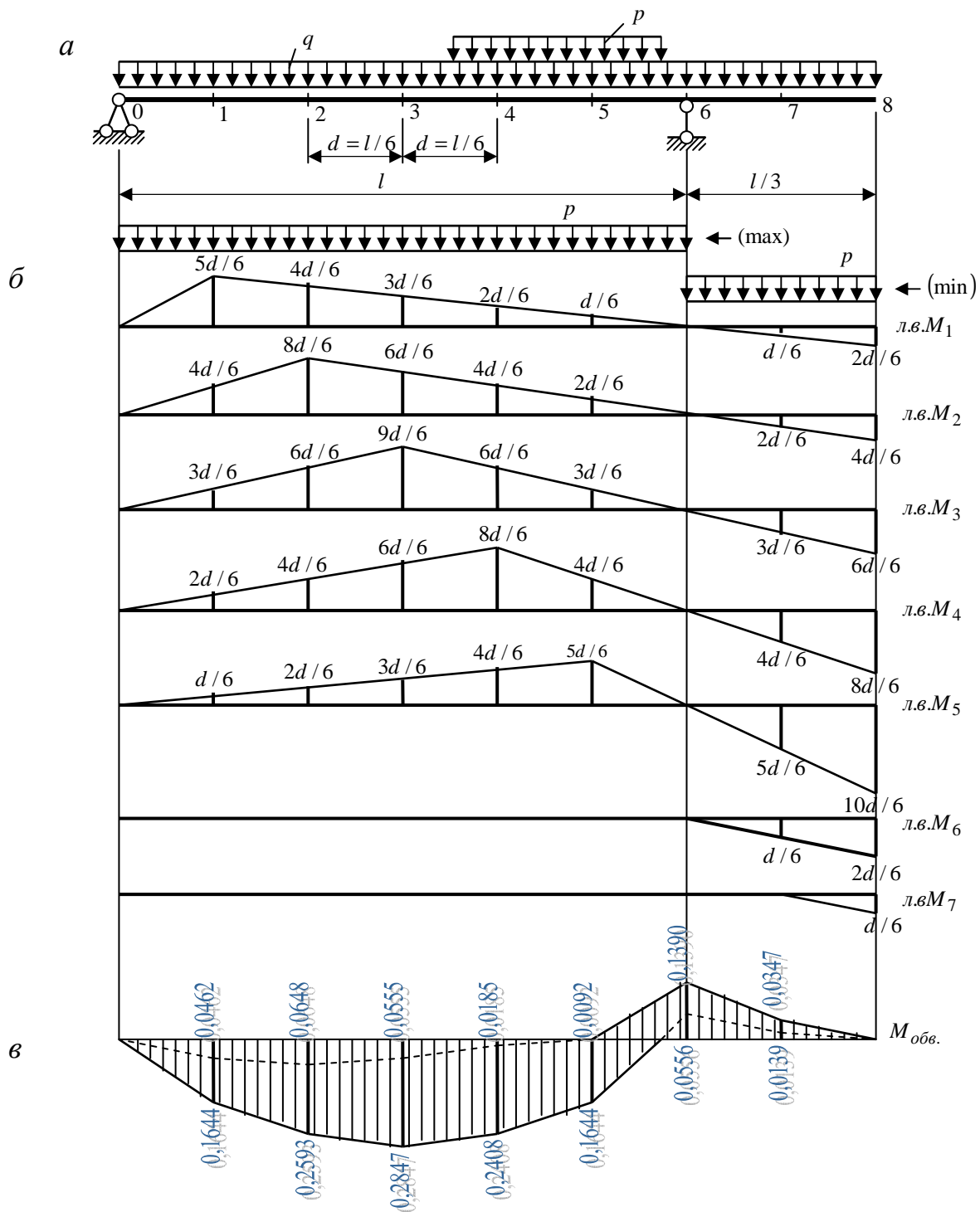
Нагадаємо, що обвідна епюра показує для кожного перерізу балки найбільше й найменше значення внутрішнього зусилля – найчастіше згинаючого моменту. Обвідні епюри зручно застосовувати при розрахунку балок змінного перерізу (особливо багатопрогінних), завантажених постійною і декількома тимчасовими навантаженнями.

При побудові обвідної епюри балку розбивають на ряд відрізків і в одержаних точках визначають розрахункові найбільші й найменші зусилля від спільної дії постійного і не вигідного сполучення тимчасових навантажень. З цією метою можна використати лінії впливу.

Покажемо побудову обвідної епюри згинаючих моментів при дії на балку (рис. 6, а) постійного навантаження q та тимчасового довільно розташованого навантаження $p = 1,5q$. Розіб'ємо балку на однакові відрізки довжиною $l/6$ (кількість відрізків вибирають залежно від необхідної точності розрахунку). Для кожного перерізу побудуємо лінію впливу згинаючого моменту (рис. 6, б), при цьому маємо на увазі, що лінії впливу M_0 та M_8 - нульові.

Завантажуючи кожен відрізок лінію впливу тимчасовим навантаженням p найне вигіднішим чином (так, щоб площа лінії впливу одного знаку в межах навантаження була найбільшою) одержуємо найбільший і найменший згинаючі моменти від тимчасового навантаження в кожному з перерізів. Так, для лінії впливу M_1 не вигідні положення навантаження показані на рисунку 6, б, а відповідні зусилля такі:

$$M_{1\max} = p \frac{5}{6} d \frac{l}{2} = 0,1042 q l^2;$$
$$M_{1\min} = p \left(\frac{-\frac{2}{6} d 2d}{2} \right) = -0,0139 q l^2.$$



Таблиця 1

Згинаючі моменти		Номер перерізу						
		1	2	3	4	5	6	7
від постійного навантаження	M	0,0602	0,0926	0,0972	0,0741	0,0602	-0,0556	-0,0139
від тимчасового навантаження	M_{\max}	0,1042	0,1667	0,1875	0,1667	0,1042	0	0
	M_{\min}	-0,0139	-0,0278	-0,417	-0,0556	-0,0694	-0,0834	-0,0208
розрахункові	M_{\max}	0,1664	0,2593	0,2847	0,2408	0,1644	-0,0556	-0,0139
	M_{\min}	0,0462	0,0648	0,0555	0,0185	-0,0092	-0,1390	-0,0347

Визначивши зусилля від постійного навантаження, підсумовуванням знаходимо розрахункові зусилля. Так, для перерізу I маємо:

$$M_1 = q \left(\frac{5}{6} d \frac{l}{2} - \frac{2}{6} d \frac{2d}{2} \right) = 0,0602 q l^2$$

і далі

$$M_{1\max} = M_1 + M_{1\max} = 0,1644 q l^2,$$

$$M_{1\min} = M_1 + M_{1\min} = 0,0462 q l^2.$$

Результати інших обчислень наведено у таблиці 1 без множника $q l^2$.

Відклавши здобуті значення в кожному перерізі, з'єднуємо між собою окремо найбільші й найменші значення. Одержана обвідна епюра M_e зображена на рисунку 6, в (значення ординат наведені без множника $q l^2$).

Аналогічно можна побудувати обвідну епюру поперечних сил.

Запитання для самоконтролю

1. Яке навантаження називається рухомим?
2. Що називають вантажною лінією?
3. Яке завдання ставиться при розрахунку на рухоме навантаження?
4. Що таке лінія впливу?
5. Що являє собою одиничний вантаж?
6. У чому відмінність лінії впливу від епюри?
7. В яких системах можливе застосування ліній впливу?
8. У чому суть статичного методу побудови ліній впливу?
9. Наведіть залежності опорних реакцій балки від положення одиничного вантажу.
10. Що таке ліва й права прямі лінії впливу?
11. Які властивості ліній впливу опорних реакцій, що дозволяють спростити їх побудову?
12. Які особливості розташування лівої і правої прямих на лініях впливу згинаючого моменту? Поперечної сили?
13. Який вигляд мають лінії впливу M і Q в перерізі консольної частини балки?
14. Які розмірності ординат ліній впливу?
15. Що являє собою ордината лінії впливу?
16. Як визначається зусилля від різних нерухомих навантажень за допомогою лінії впливу?
17. Як визначається за лінією впливу найбільше зусилля від рухомої зосередженої сили?
18. Що таке рухома система сил?
19. Якій умові відповідає небезпечне завантаження лінії впливу ламаного обрису рухомою системою сил?
20. Яка сила називається критичною?
21. Як знайти критичну силу для лінії впливу трикутного обрису?
22. Як будують лінії впливу при вузловій передачі навантаження?
23. Яку епюру називають обвідною?
24. Як будують обвідну епюру?

1.2 Особливості побудови ліній впливу для стержневих систем

1.2.1 Лінії впливу для ферм

Розглянемо побудову ліній впливу в стержнях балочної ферми (рис. 7, а) статичним методом. Навантаження прикладене до нижнього поясу, тобто вантажною лінією є вісь нижнього поясу. Цей варіант прикладання навантаження називають *їздою низом*. Вирази для опорних реакцій ферми повністю відповідають балочним:

$$R_A = (l - x) / l, \quad R_B = x / l.$$

Лінія впливу N_1 . Перерізом I-I розріжемо ферму на дві частини й, відповідно, розглянемо два випадки розташування навантаження.

Одиничний вантаж на лівій частині ферми. Способом моментної точки одержуємо:

$$\Sigma M_{K_1} = 0, \quad R_B \cdot 5d - N_1 \cdot h = 0,$$

звідки $N_1 = R_B \cdot 5d / h$, або, беручи до уваги вираз для R_B , $N_1 = \frac{x}{l} \cdot \frac{5d}{h} = \frac{5}{8h} \cdot x$.

При $x = 0$ $N_1 = 0$, при $x = 3d$ $N_1 = 15d / (8h)$.

Відзначимо, що внаслідок вузлової передачі навантаження вантаж $F = 1$ знаходиться на лівій частині при $0 \leq x \leq 3d$. При подальшому зміщенні праворуч на розрізану панель він буде передаватися як на ліву, так і на праву частини, що не відповідає прийнятому положенню навантаження.

Через одержані точки проведемо ліву пряму лінії впливу N_1 (рис. 7, б).

Одиничний вантаж на правій частині:

$$\Sigma M_{K_1} = 0, \quad -R_A \cdot 3d + N_1 \cdot h = 0,$$

звідки $N_1 = R_A \cdot \frac{3d}{h}$ або $N_1 = \frac{l - x}{l} \cdot \frac{3d}{h} = \frac{3(8d - x)}{8h}$.

При $x = 4d$ $N_1 = 3d / (2h)$, при $x = l = 8d$ $N_1 = 0$. Аналогічно попередньому, абсциса $x = 4d$ відповідає крайньому положенню вантажу на правій частині ферми.

Через одержані точки проводимо праву пряму (рис. 7, б). За правилами вузлової передачі навантаження з'єднуємо ліву й праву прямі лінії впливу. Цей відрізок називають *передаточною прямою*.

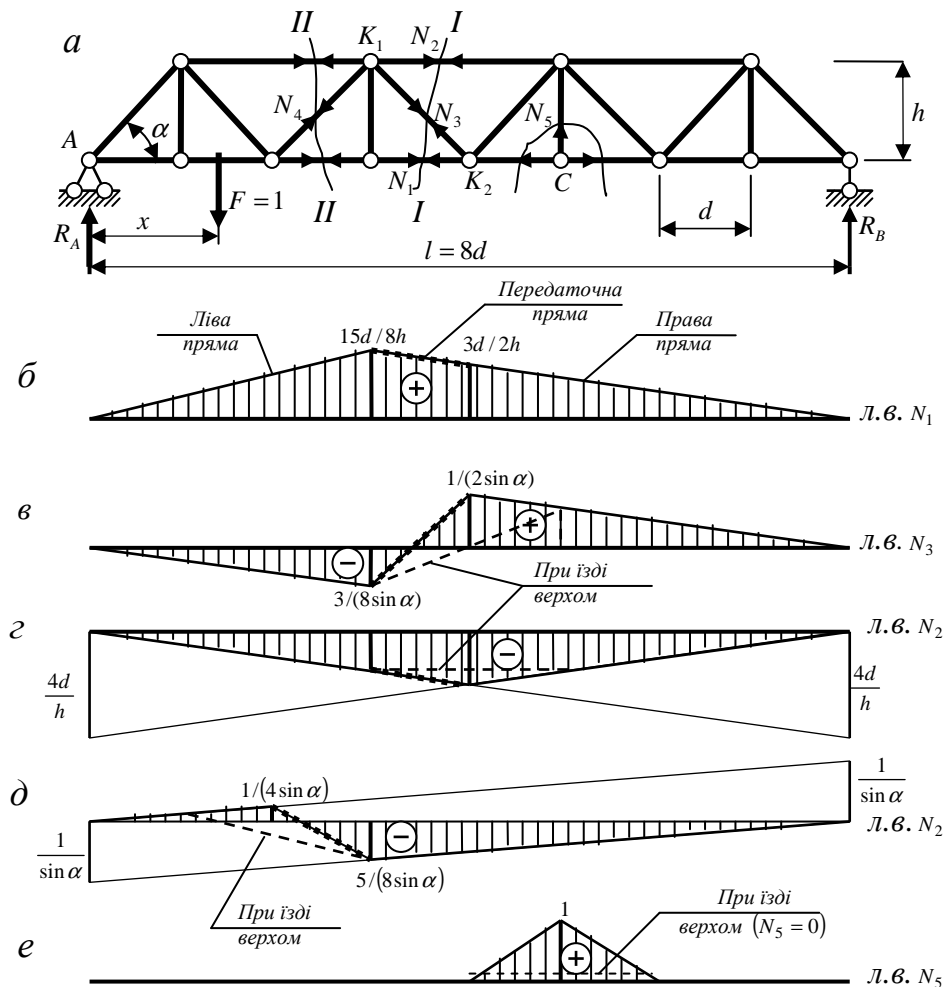


Рисунок 7

Відзначимо важливу особливість побудованої лінії впливу. При продовженні правої прямої вона перетинається з лівою прямою під моментною точкою K_1 . Ця властивість підтверджується співвідношенням, одержаним при розрахунку ферми на нерухоме навантаження: $N_{н.п.} = M^o / h$. Тобто обрис лінії впливу зусилля у елементі поясу ферми (без урахування вузлової передачі) відповідає обрису лінії впливу балочного згинаючого моменту для перерізу під моментною точкою. Ця властивість зберігається в усіх випадках, коли зусилля обчислюється способом моментної точки.

Лінія впливу N_3 . Переріз I-I.

Одиничний вантаж на лівій частині ферми. Застосовуючи спосіб проекцій, одержимо

$$\sum y = 0, \quad R_B + N_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

звідки $N_3 = -\frac{R_B}{\sin \alpha}$ або $N_3 = -\frac{x}{l \cdot \sin \alpha} = -\frac{x}{8d \sin \alpha}$. При $x=0$ $N_3=0$, при $x=3d$ $N_3 = -\frac{3}{8 \sin \alpha}$. Через ці точки проводимо ліву пряму (рис. 7, в).

Одиничний вантаж на правій частині:

$$\sum y = 0, R_A - N_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

звідки $N_3 = \frac{R_A}{\sin \alpha}$ або $N_3 = \frac{l-x}{l \cdot \sin \alpha} = \frac{8d-x}{8d \cdot \sin \alpha}$. При $x=4d$ $N_3 = 1/(2 \sin \alpha)$, при $x=l=8d$ $N_3=0$. Проведемо через ці точки праву пряму (рис. 7, в), та з'єднаємо її з лівою передаточною прямою.

З побудованої лінії видно, що ліва та права прямі на ній паралельні одна одній. Ця властивість також впливає з результатів розрахунку на нерухоме навантаження. Дійсно, для зусилля в розкосі балочної ферми з паралельними поясами була одержана залежність $N_p = Q^o / \sin \alpha$. Тобто обрис лінії впливу зусилля в розкосі (без урахування вузлової передачі навантаження) відповідає обрису лінії впливу балочної поперечної сили. Зазначимо, що ця особливість зберігається в усіх випадках, коли зусилля обчислюється способом проекцій.

Покажемо, як скористатися балочною аналогією для скорочення розрахунків при побудові ліній впливу.

Побудуємо *лінію впливу зусилля* N_2 . Для визначення цього зусилля, що входить у переріз I-I, використовується моментна точка K_2 .

При розташуванні рухомої одиничної сили ліворуч від перерізу маємо:

$$\sum M_{K_2} = 0; R_B \cdot 4d + N_2 h = 0; N_2 = -R_B \frac{4d}{h} = -\frac{x}{8d} \frac{4d}{h};$$

при $x=0$ $N_2=0$; при $x=3d$ $N_2 = \frac{d}{h}$. За цими даними на рис. 7, з проведена ліва пряма. Далі подовжимо ліву пряму праворуч і з подоби трикутників одержимо під моментною точкою її ординату $N_2 = \frac{3d}{2h} \frac{4d}{3d} = \frac{2d}{h}$. З урахуванням балочної аналогії права пряма повинна пройти через цю ординату (перетин з лівою прямою під моментною точкою) та через нульову ординату під правою опорою ферми.

Після урахування вузлової передачі навантаження (ліва та права прямі поєднуються між собою передаточною прямою) лінія впливу набуває остаточного вигляду, наведеного на рисунку 7, з.

Звернемо увагу на те, що ліва і права прямі при продовженні відсікають на опорах ординати $4d/h$, що дорівнюють відстаням від цих опор до моментної точки K_2 , поділеним на плече зусилля N_2 відносно цієї моментної точки (рис. 7, з).

Аналогічно побудуємо *лінію впливу* N_4 .

При розташуванні одиничного вантажу ліворуч від перерізу маємо:

$$\sum x = 0; R_B - N_4 \sin \alpha = 0; N_4 = \frac{R_B}{\sin \alpha} = \frac{x}{8d \sin \alpha};$$

при $x = 0$ $N_4 = 0$; при $x = 2d$ $N_4 = \frac{1}{4d \sin \alpha}$. За цими даними на рисунку 7, д

проведена ліва пряма. Праву пряму проведемо зважаючи на те, що за балочною аналогією вона повинна бути паралельною лівій прямій.

Після урахування вузлової передачі навантаження лінія впливу N_4 набуває вигляду, показаного на рисунку 7, д.

Зазначимо, що ліва та права прямі цієї лінії впливу при подовженні до протилежних опор відсікають під ними ординати $1/\sin \alpha$.

Розглянемо побудову *лінії впливу* N_5 - зусилля в підвісці балочної ферми (рис. 7 а). Оскільки для визначення цього зусилля раціонально використати спосіб вирізання вузлів (вузол С), слід розібрати такі два варіанти розміщення навантаження: вантаж у вузлі С та вантаж за межами вузла С.

При розміщенні вантажу у вузлі С маємо: $N_5 = F = 1$.

При розміщенні вантажу за межами вузла С (а також суміжних панелей) $N_5 = 0$.

Лінія впливу N_5 після проведення передаточних прямих зображена на рисунку 7, е.

Нагадаємо, що лінії впливу побудовані при їзді низом. *При їзді верхом*, коли навантаження переміщується верхнім поясом, якщо вузли на кінцях верхнього та нижнього поясів не співпадають за розташуванням уздовж прогону ферми, змінюються межі розташування одиничної сили ліворуч та праворуч від перерізу. Для лінії впливу N ця обставина не змінює її обрису, оскільки передаточна пряма у цьому випадку лише формально подовжується уздовж правої прямої. Для інших ліній впливу зміна обрису показана на рисунку 7 штриховими лініями.

Розглянемо інші випадки побудови ліній впливу. Для ферми, наведеної на рисунку 8, а, побудуємо лінії впливу зусиль у другому (N_1) та у середньому (N_2) стояках.

Оскільки ферма балочна, реакції її опор визначаються балочними залежностями: $R_A = \frac{l-x}{l}$; $R_B = \frac{x}{l}$.

Лінія впливу N_1 . Проведемо переріз I-I. Моментна точка - K_1 .

Одиничний вантаж на лівій частині ферми:

$$\sum M_{K_1} = 0; R_B(c+l) - N_1(c+2d) = 0;$$

$$N_1 = R_B \frac{c+l}{c+2d} = \frac{x}{l} \cdot \frac{c+l}{c+2d}.$$

При $x=0$ $N_1=0$, при $x=2d$ $N_1 = \frac{c+6d}{3(c+2d)}$. За цими ординатами на рисунку 8, б проведена ліва пряма.

Подовживши ліву пряму до моментної точки K_1 (у цьому випадку ліворуч), одержимо точку m_1 її перетину з правою прямою. Через цю точку та нульову ординату під правою опорою ферми проводимо пряму, на якій повинна лежати права пряма. Межі дійсності цієї прямої відповідають розташуванню одиничної сили на правій частині ферми, тобто на 4-й, 5-й та 6-й панелях. Тепер залишається з'єднати передаточною прямою ліву та праву прямі (рис. 8, б). Необхідні ординати правої прямої можна одержати з подоби трикутників, попередньо визначивши спільну ординату під моментною точкою.

Лінія впливу N_2 . Вирізавши вузол E , знаходимо

$$\sum x = 0, N_3 \cdot \cos \alpha - N_4 \cdot \cos \alpha = 0,$$

звідки $N_3 = N_4$;

$$\sum y = 0, N_3 \cdot \sin \alpha + N_4 \cdot \sin \alpha + N_2 = 0,$$

звідки

$$N_2 = -2N_3 \cdot \sin \alpha. \quad (20)$$

Оскільки зусилля N_2 виражається через N_3 , спочатку побудуємо лінію впливу останньої. Для цього проведемо допоміжний переріз II-II. При розташуванні одиничного вантажу на правій частині ферми маємо:

$$\sum M_{K_3} = 0; R_B \cdot 3d + N_3 \cdot r_3 = 0, \text{ звідки маємо: } N_3 = -R_B \frac{3d}{r_3}.$$

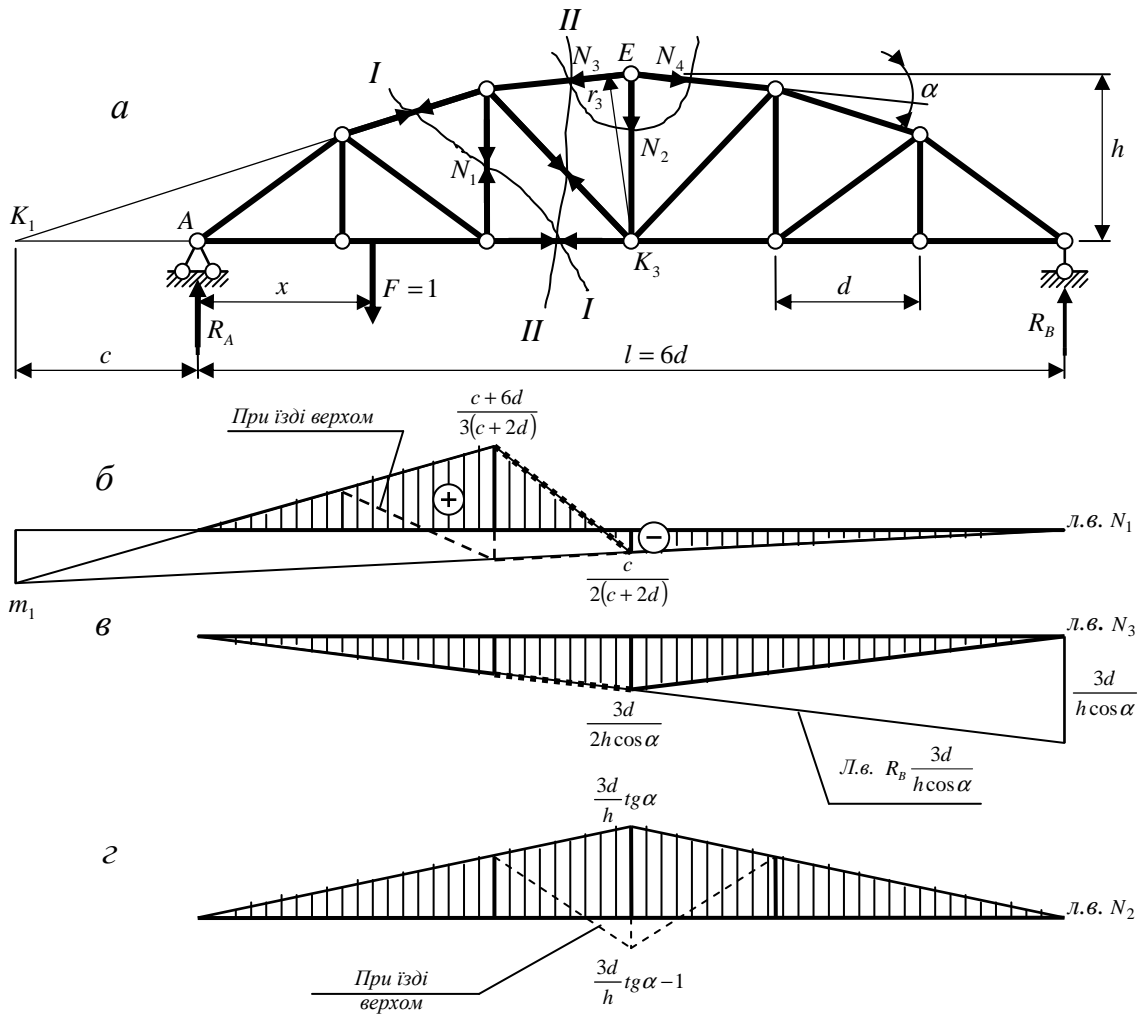


Рисунок 8

Враховуючи, що $r_3 = h \cdot \cos \alpha$, проводимо пряму, що відповідає лінії впливу R_B , ординати якої помножені на $\left(-\frac{3d}{h \cos \alpha}\right)$. На цій прямій у межах лівої частини ферми (1-ша та 2-га панелі) лежить ліва пряма. Праву пряму проводимо з умови її перетину з лівою під моментною точкою K_3 . Одержана лінія впливу N_3 показана на рисунку 8, в.

Тепер для побудови лінії впливу N_2 скористаємося співвідношенням (20). На його підставі лінію впливу N_2 (рис. 8, з) одержимо множенням ординат лінії впливу N_3 на коефіцієнт $(-2 \sin \alpha)$.

Зауважимо, що лінії впливу N_1 , N_2 побудовані при розташуванні вантажу на нижньому поясі ферми (при їзді низом). При їзді вгору ці лінії впливу зміняться. На лінії впливу N_1 розташування передаточної прямої зміниться за рахунок того, що межі розташування вантажу ліворуч та праворуч

змінюються (переріз I-I у нижньому поясі проходив через третю панель, а у верхньому – через другу). Співвідношення (20) для зусилля N_3 було одержано з урахуванням відсутності одиничної сили у вузлі E при їзді низом. При їзді верхом це відповідає розташуванню сили за межами 3-ї та 4-ї панелей. Якщо ж сила розташована у вузлі E , маємо:

$$N_2 = -2N_3 \cdot \sin \alpha - 1 = \frac{3d}{h} \operatorname{tg} \alpha - 1.$$

Зміни у лініях впливу при їзді верхом наведені на рис 8, б, з штриховими лініями.

Зусилля у стержнях ферм від рухомого та нерухомого навантажень з допомогою ліній впливу визначають за загальними правилами.

1.2.2 Лінії впливу реакцій і внутрішніх зусиль у тришарнірній арці

Для побудови ліній впливу зусиль у тришарнірній арці (рис. 9, а) застосуємо статичний метод. Вертикальні складові реакцій в опорах арки є балочними. Їх вирази $V_A = (l - x)/l$, $V_B = x/l$ та самі лінії впливу (рис. 9, б, в) повністю збігаються з виразами та лініями впливу опорних реакцій у простій двохопорній балці.

Для побудови *лінії впливу розпору H* скористаємося формулою, одержаною при розрахунку на вертикальне нерухоме навантаження: $H = M_C^0 / f$. Звідси випливає, що лінію впливу H можна одержати діленням ординат лінії впливу балочного моменту M_C^0 , побудованої для перерізу C , на стрілу підйому f . Тоді ордината цієї лінії впливу в точці C (рис. 9, з) буде такою:

$$H = l / (4f). \quad (21)$$

Для побудови *лінії впливу згинаючого моменту* в перерізі K скористаємося формулою для згинаючого моменту, одержаною при розрахунку арки на вертикальне нерухоме навантаження:

$$M_K = M_K^0 - H y. \quad (22)$$

Отже, лінію впливу згинаючого моменту можна одержати шляхом алгебраїчного підсумовування ординат двох ліній впливу: лінії впливу балочного моменту в цьому перерізі (рис. 9, д) та лінії впливу розпору, помноженої на ординату перерізу y_K . Підсумовування можна виконати або безпосереднім обчисленням характерних ординат результуючої лінії впливу, або способом накладання ліній впливу.

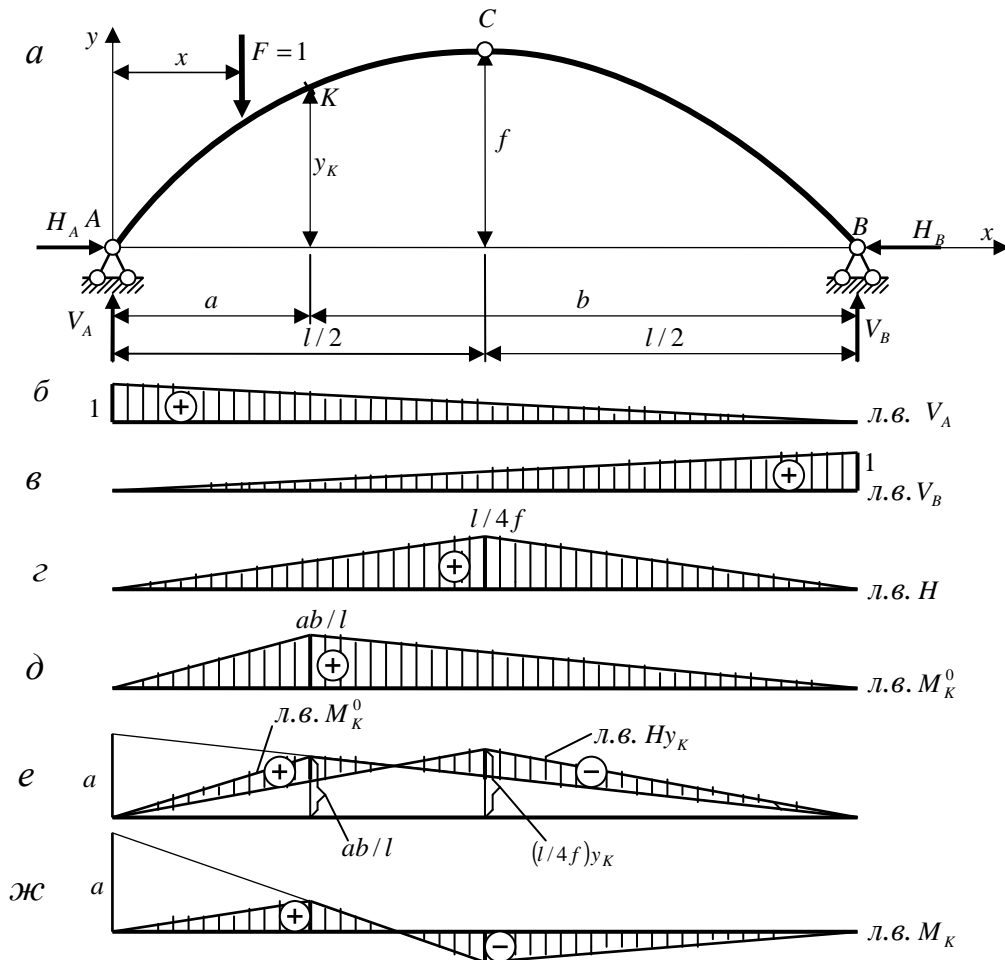


Рисунок 9

При використанні способу накладання на загальній осі будують лінію впливу балочного моменту M_K^o та лінію впливу розпору, помножену на y_K (рис. 9, е). Тоді ординати, що знаходяться між цими лініями впливу, є ординатами результуючої лінії впливу M_K . Залишається обчислити їх величини та побудувати лінію впливу на горизонтальній осі під аркою (рис. 9, ж).

Для побудови лінії впливу поперечної сили Q_K (рис. 10) також скористаємося виразом, одержаним при розрахунку арки на нерухоме вертикальне навантаження:

$$Q_K = Q_K^o \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K. \quad (23)$$

Складаючи алгебраїчно ординати лінії впливу Q_K^o (рис. 10, б), помножені на $\cos \varphi_K$, з ординатами лінії впливу розпору, помноженими на $\sin \varphi_K$, будемо результуючу лінію впливу Q_K (рис. 10, г).

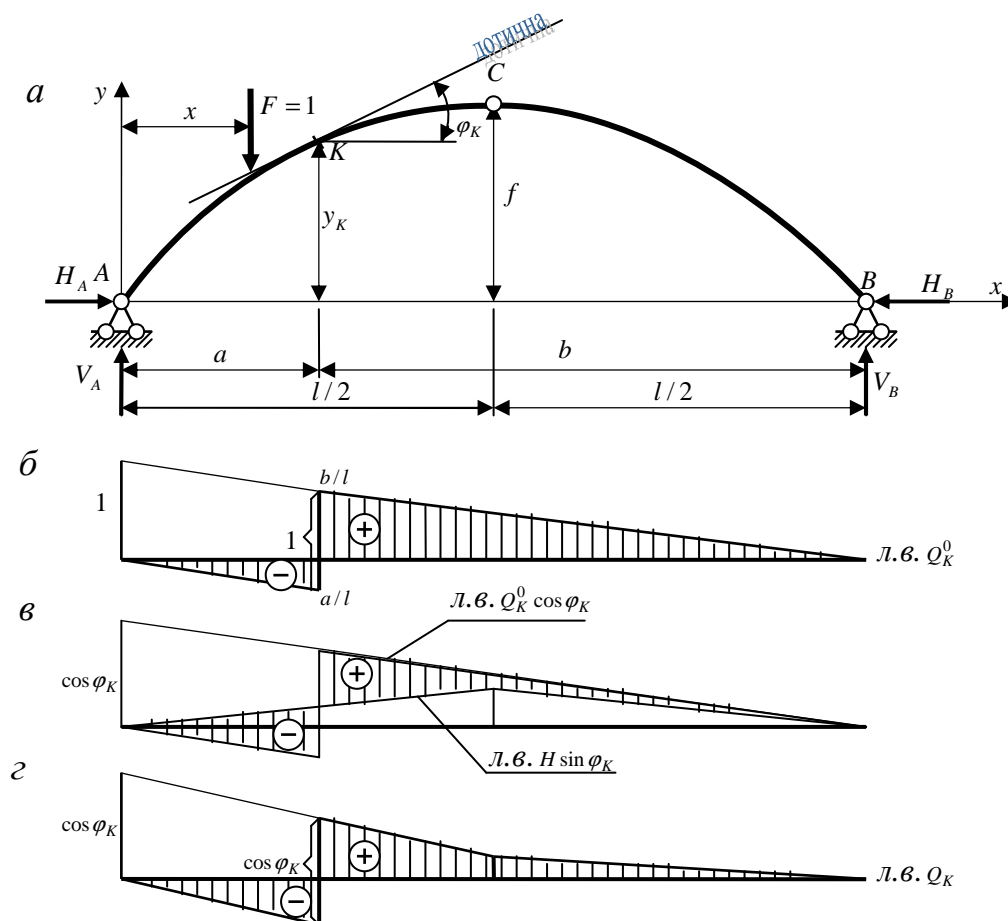


Рисунок 10

Застосування способу накладання для побудови цієї лінії впливу показано на рисунку 10, в. З процесу побудови зрозуміло, що відрізки остаточної лінії впливу, розташовані ліворуч та праворуч від перерізу, паралельні один одному.

Для побудови лінії впливу поздовжньої сили у перерізі K також скористаємося результатами розрахунку на нерухоме вертикальне навантаження:

$$N_K = -Q_K^o \cdot \sin \varphi_K - H \cdot \cos \varphi_K. \quad (24)$$

На підставі цього виразу алгебраїчно підсумовуємо ординати ліній впливу Q_K^o , помножені на $\sin \varphi_K$, та ординати лінії впливу розпору, помножені на $\cos \varphi_K$.

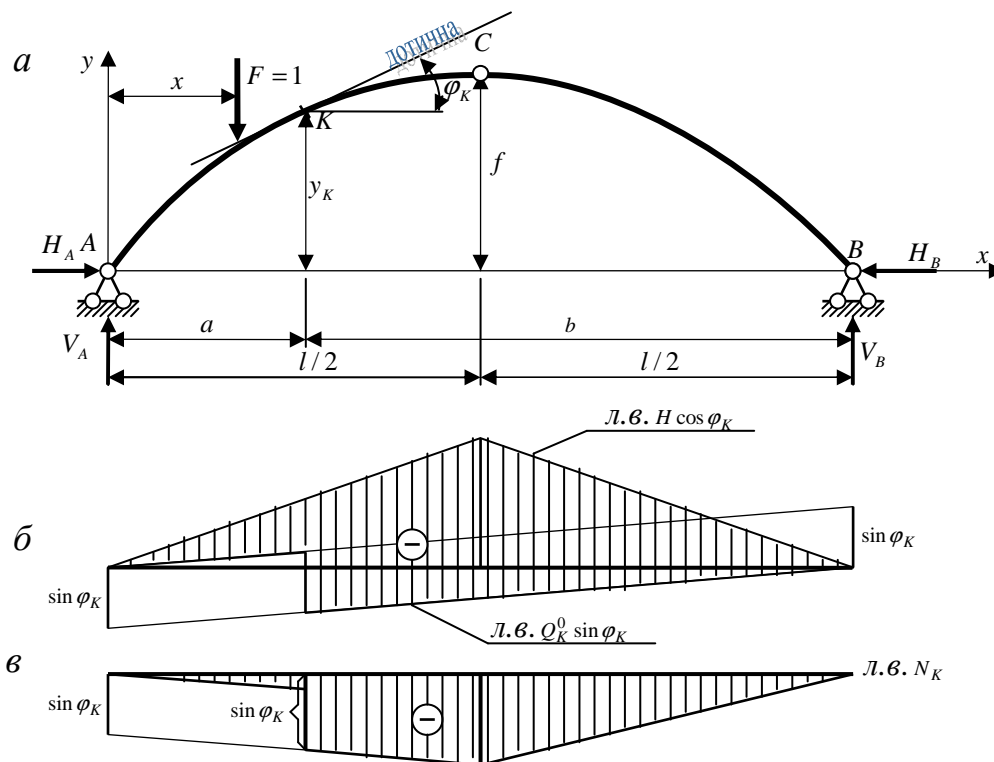


Рисунок 11

Накладання ліній впливу показано на рисунку 1.49, б, а остаточна лінія впливу N_K – на рисунку 11, в.

Запитання для самоконтролю

1. Чи відрізняються лінії впливу опорних реакцій для балочної ферми та балки на двох опорах?
2. Які три частини зазвичай можна виділити у лінії впливу зусилля в стержні ферми, яке визначається способом моментної точки або способом проекцій?
3. Як розташовані відносно одна одної ліва та права прямі на лінії впливу зусилля у стержні ферми, яке визначається способом моментної точки?, способом проекцій?
4. Як використовується балочна аналогія для прискорення побудови ліній впливу зусиль у поясах та розкосах балочної ферми?
5. Який вид мають лінії впливу вертикальних реакцій тришарнірної арки?
6. Як побудувати лінії впливу внутрішніх зусиль у перерізах тришарнірної арки способом накладання?
7. Скільки лінійних ділянок зазвичай містять лінії впливу внутрішніх зусиль у тришарнірній арці?

8. Чому дорівнює стрибок на лінії впливу поперечної сили у перерізі тришарнірної арки?, на лінії впливу поздовжньої сили?
9. Чи відрізняються правила завантаження ліній впливу для тришарнірної арки від завантаження ліній впливу інших зусиль?

1.3 Інші випадки побудови ліній впливу

1.3.1 Лінії впливу переміщень

Побудову ліній впливу переміщень покажемо на прикладі *лінії впливу прогину* перерізу на кінці консолі (рис. 12, а).

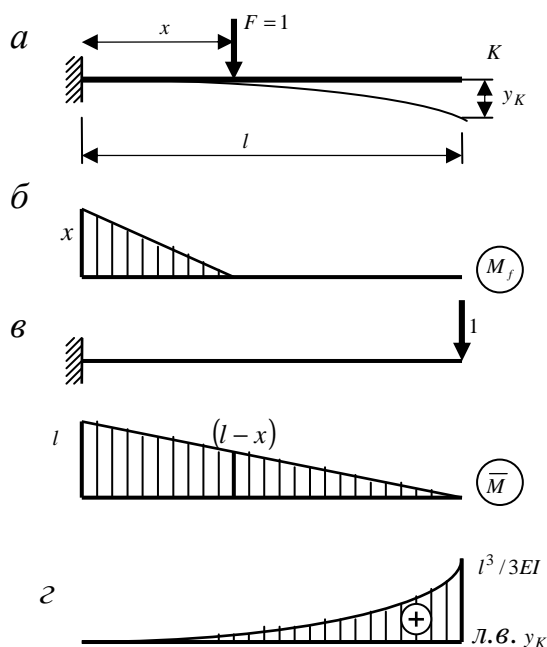


Рисунок 12

Для визначення переміщення використовуємо метод Мора. Для цього побудуємо епюру згинаючих моментів від навантаження – одиничної сили у довільному положенні на відстані x від затиснення (рис. 12, б), та епюру від одиничної сили, що діє у напрямку шуканого переміщення (рис. 12, в). Помножуючи епюри M_f та \bar{M} за правилом Верещагіна, одержуємо:

$$y_K = \sum \frac{1}{EI} \int_{(l)} M_f \bar{M} dx = \frac{1}{EI} \frac{x \cdot x}{2} \left[\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} (l - x) \right] = \left(\frac{x^2 l}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (25)$$

Отже, залежність прогину від розташування сили уздовж балки є кубічною параболою. При $x=0$ $y_K=0$ та $\frac{dy}{dx}=0$. Тобто вершина параболи знаходиться у перерізі біля затиснення. При $x=l$ $y_K = \frac{l^3}{3EI}$. За цими даними на рисунку 12, г побудована лінія впливу прогину перерізу на кінці консолі.

1.3.2 Лінії впливу у статично невизначуваних системах

З розрахунків методом сил будь-яке зусилля S у статично невизначуваній системі можна визначити з застосуванням принципу незалежності дії сил так:

$$S = S_f + \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \dots + \bar{S}_i X_i + \dots + \bar{S}_n X_n. \quad (26)$$

На підставі (26) для побудови лінії впливу будь-якого зусилля у статично невизначуваній системі необхідно мати лінії впливу зайвих невідомих X_i та лінію впливу шуканого зусилля S_f у статично визначуваній основній системі методу сил.

Розв'язок системи канонічних рівнянь методу сил у загальному випадку запишемо так:

$$X_i = -(\alpha_{11}\delta_{1f} + \alpha_{12}\delta_{2f} + \dots + \alpha_{ik}\delta_{if} + \dots + \alpha_{in}\delta_{if}), \quad (27)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

де α_{ik} - елемент оберненої матриці коефіцієнтів канонічних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1k} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2k} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \dots & \delta_{ik} & \dots & \delta_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nk} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ik} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix};$$

δ_{if} - лінія впливу переміщення у напрямку зайвого невідомого X_i .

На підставі теореми про взаємність переміщень $\delta_{if} = \delta_{fi}$, тобто лінію впливу δ_{if} можна замінити епюрою переміщень δ_{fi} від дії зайвого невідомого $\bar{X}_i = 1$.

Побудову ліній впливу зусиль у статично невизначуваній системі покажемо на прикладі лінії впливу згинаючого моменту у перерізі I трипрогонової балки постійного перерізу (рис. 13, а).

Основна система методу сил наведена на рисунку 13, б. Побудувавши епюри згинаючих моментів від дії одиничних зайвих невідомих (рис. 13, в, г), обчислюємо коефіцієнти канонічних рівнянь методу сил:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EI} \frac{1 \cdot l}{2} \frac{2}{3} 1 \cdot 2 = \frac{2l}{3EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \frac{1 \cdot l}{2} \frac{1}{3} 1 = \frac{l}{6EI}.$$

Матриця коефіцієнтів має такий вид: $D = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Обертаючи цю матрицю, одержимо: $D^{-1} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 1,6 & -0,4 \\ -0,4 & 1,6 \end{bmatrix}$. Отже,

$$\text{маємо: } \alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1,6EI}{l}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = -\frac{0,4EI}{l}.$$

Для побудови епюр переміщень δ_{fi} обчислимо прогин однієї з балок основної системи при дії довільно розташованої одиничної сили (рис. 13, д):

Перемножуючи за правилом Верещагіна епюри \bar{M} та \bar{M}_1 , одержуємо:

$$\delta_{f1} = \frac{1}{EI} \left[\frac{x \cdot x(l-x)}{2 \cdot l} \frac{2}{3} \frac{x}{l} + \frac{(l-x) \cdot x(l-x)}{2 \cdot l} \left(\frac{2}{3} \frac{x}{l} + \frac{1}{3} \right) \right].$$

При $x = 0$ $\delta_{f1} = 0$; при $x = 0,25l$ $\delta_{f1} = 0,03906 \frac{l^3}{EI}$; при

$x = 0,5$ $\delta_{f1} = 0,0625 \frac{l^3}{EI}$; при $x = 0,75$ $\delta_{f1} = 0,05469 \frac{l^3}{EI}$; при $x = l$ $\delta_{f1} = 0$.

За цими даними на рис. 13, е побудовано епюри прогинів у основній системі від дії відповідно δ_{f1} та δ_{f2} (значення ординат показані без множника $\frac{l^3}{EI}$ через чверть прогонів).

Запишемо вирази для ліній впливу зайвих невідомих за (27):

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{1,6EI}{l} \delta_{f1} + \frac{0,4EI}{l} \delta_{f2}; \\ X_2 &= \frac{0,4EI}{l} \delta_{f1} - \frac{1,6EI}{l} \delta_{f2} \end{aligned} \quad (28)$$

Обчислення ординат ліній впливу зайвих невідомих наведено у таблиці 2.

При обчисленні ординат у таблиці 2 враховані лише їх безрозмірні частини.

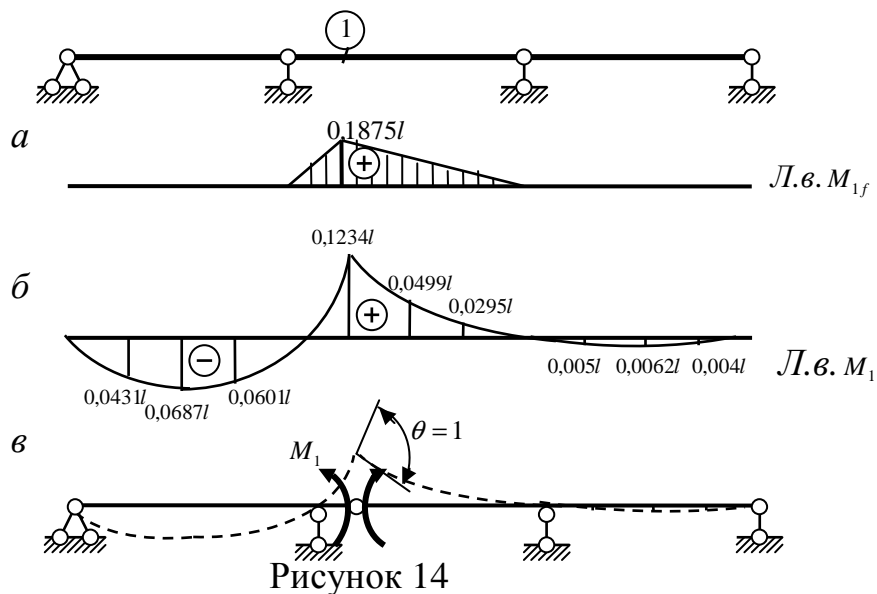


Таблица 2

x/l	δ_{f1}	δ_{f2}	$\alpha_{11}\delta_{f1}$	$\alpha_{12}\delta_{f2}$	X_1	$\alpha_{12}\delta_{f1}$	$\alpha_{22}\delta_{f2}$	X_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,0391	0	0,0626	0	-0,0626	-0,0156	0	0,0156
0,5	0,0625	0	0,1	0	-0,1	-0,025	0	0,025
0,75	0,0547	0	0,0875	0	-0,0875	-0,0219	0	0,0219
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1,25	0,0547	0,0391	0,0875	-0,0156	-0,0719	-0,0219	0,0626	-0,0407
1,5	0,0625	0,0625	0,1	-0,025	-0,075	-0,025	0,1	-0,075
1,75	0,0391	0,0547	0,0626	-0,0219	-0,0407	-0,0156	0,0875	-0,0719
2	0	0	0	0	0	0	0	0
2,25	0	0,0547	0	-0,0219	0,0219	0	0,0875	-0,0875
2,5	0	0,0625	0	-0,025	0,025	0	0,1	-0,1
2,75	0	0,0391	0	-0,0156	0,0156	0	0,0626	-0,0626
3	0	0	0	0	0	0	0	0

За результатами обчислень таблиці 2 на рисунку 13, ж побудовані лінії впливу зайвих невідомих.

Лінію впливу згинаючого моменту M_f у основній системі побудовано на рисунку 14, а.



Обчислення ординат лінії впливу згинаючого моменту у перерізі I виконано у таблиці 3 виходячи з виразу (26), який у нашому випадку набуває такого вигляду:

$$M_1 = M_{1f} + \bar{M}_{11} X_1 + \bar{M}_{12} X_2 = M_{1f} + 0,75 \cdot X_1 + 0,25 \cdot X_2.$$

Таблиця 3

x/l	M_{1f}	X_1	X_2	$\bar{M}_{11} X_1$	$\bar{M}_{12} X_2$	M_1
1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0
0,25	0	-0,0626l	0,0156l	-0,047l	0,0039l	-0,0431l
0,5	0	-0,1	0,025l	-0,075l	0,0063l	-0,0687l
0,75	0	-0,0875l	0,0219l	-0,0656l	0,0055l	-0,0601l
1	0	0	0	0	0	0
1,25	0,1875l	-0,0719l	-0,0407l	-0,0539l	-0,0102l	0,1234l
1,5	0,125l	-0,075l	-0,075l	-0,0563l	-0,0188l	0,0499l
1,75	0,0625l	-0,0407l	-0,0719l	-0,0305l	-0,0025l	0,0295l
2	0	0	0	0	0	0
2,25	0	0,0219l	-0,0875l	0,0164l	-0,0219l	-0,0055l
2,5	0	0,025l	-0,1l	0,0188l	-0,025l	-0,0062l
2,75	0	0,0156l	-0,0626l	0,0117	-0,0157l	-0,004l
3	0	0	0	0	0	0

За результатами обчислень на рисунку 14, б побудована лінія впливу M_1 . Як бачимо, на відміну від ліній впливу зусиль у статично визначуваних системах, лінія впливу зусилля у статично невизначуваній системі нелінійна.

Нагадаємо, що внутрішнє зусилля можна вважати реакцією у деякій внутрішній в'язі. Наприклад, згинаючий момент у перерізі – це зусилля у в'язі, яка перешкоджає взаємному повороту суміжних перерізів: $M_i = -r_{if}$. На підставі теореми про взаємність реакцій та переміщень маємо $-r_{if} = \delta_{fi}$. Звідси випливає, що лінію впливу згинаючого момента M_i можна одержати як епюру переміщень системи з відкинутою в'яззю від одиничного переміщення у напрямку цього зусилля. Так на рисунку 14, в показана епюра переміщень від M_1 , що відповідає виду лінії впливу M_1 .

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть послідовність побудовання ліній впливу переміщень.
2. Яка послідовність побудови ліній впливу у статично невизначуваній системі?
3. Як використовується теорема про взаємність переміщень при побудові ліній впливу зайвих невідомих?
4. Як за обрисом відрізняються лінії впливу зусиль у статично невизначуваних та статично визначуваних системах?

2 Стійкість стержневих систем

2.1 Основні поняття

2.1.1 Визначення

Стійкість – це здатність споруди та усіх її частин зберігати своє початкове положення та деформований стан при діючих навантаженнях.

Втрата стійкості – це перехід системи від стійкої до нестійкої рівноваги. Поняття стійкої та нестійкої рівноваги пояснимо на прикладі кульки, розташованої на криволінійній поверхні (рис. 15). При відхиленні кульки від положення 1 у нижній точці увігнутої частини поверхні вона здійснює затухаючі коливання, і зрештою повертається у початкове положення. Таке положення кульки ілюструє стан стійкої рівноваги. При відхиленні кульки від

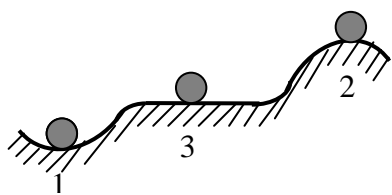


Рисунок 15

положення 2 у верхній точці опуклої частини поверхні вона скотиться донизу і не повернеться у початкове положення. Такий стан – це стан нестійкої рівноваги. І нарешті, положення 3 на горизонтальній частині поверхні відповідає стану байдужої рівноваги.

Спрощено визначення стійкої рівноваги можна сформулювати так: *стан рівноваги можна вважати стійким, якщо при достатньо малих збудженнях відхилення системи впродовж усього часу руху залишаються малими, причому зменшуючи збудження, можна зробити ці відхилення скільки завгодно малими.*

Розрізняють *стійкість положення* та *стійкість форми рівноваги* у деформованому стані. Втрата стійкості *положення* пов'язана з порушенням умов рівноваги зовнішніх сил (перекидання баштового крану, перекидання або зсув підпірної стінки).

Втрата стійкості *форми рівноваги* у деформованому стані є наслідком порушення рівноваги між внутрішніми та зовнішніми силами. При цьому стається перерозподіл внутрішніх зусиль і рівновага оновлюється лише у новому деформованому стані. Тут ми будемо розглядати лише стійкість форми рівноваги.

Розглянемо поведінку прямого стержня стиснутого осьовою силою F (рис. 16). При усіх значеннях цієї сили, менших деякого, стержень буде зберігати висхідну прямолінійну форму. Якщо при цьому його дещо відхилити і відпустити, він, здійснивши обмежену кількість коливань навколо висхідного положення, повернеться до первісної прямолінійної форми. Отже, висхідна прямолінійна форма є стійкою.

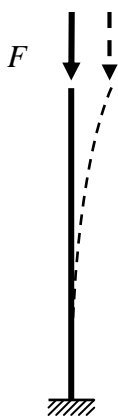


Рисунок 16

Зі зростанням сили стержень випрямляється усе повільніше і, нарешті, при деякому її значенні прямолінійна форма стає нестійкою. Якщо тепер відхилити стержень на деяку малу величину, він не повернеться до висхідного стану, а буде відхилятися усе далі або зупиниться у відхиленому положенні.

Теоретично висхідна прямолінійна форма залишається можливою, але поряд з нею з'являється нова – викривлена форма рівноваги.

Найбільша сила (навантаження), до якої

висхідна форма є стійкою, називається критичною силою (навантаженням).

Крім цього визначення, що є визначенням знизу, можна дати визначення зверху. У цьому випадку критичною називається найменша сила (навантаження), до якої крім висхідної існує хоча би ще одна форма рівноваги, що відрізняється від висхідної.

Визначення критичної сили є основною метою розрахунків на стійкість.

Перехід стержня у нове положення пов'язаний з виникненням нескінченно малих переміщень, тому нова форма рівноваги називається *суміжною*. Така втрата стійкості називається втратою стійкості «у малому». На відміну від неї при втраті стійкості «у великому» перехід системи у нове положення супроводжується достатньо великими переміщеннями. Наприклад, в системі на рисунку 17 при досягненні силою критичного значення втрата стійкості відбувається різким переходом системи (так зване «процокування») у нижнє положення.

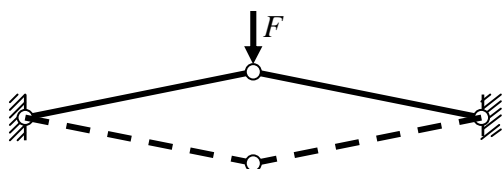


Рисунок 17

Відзначимо, що система, стійка «у великому», стійка і «у малому». Зворотне твердження не завжди вірне.

У нашому курсі будемо розглядати лише втрату стійкості «у малому».

Перехід стиснутого стержня при втраті стійкості у нове положення пов'язаний з появою деформацій згину. Залежно від того, який новий вид деформації з'являється при втраті стійкості, розрізняють згинальну, крутильну, згинально-крутильну та інші види втрати стійкості. Так у тонкій полосі (рис. 18, а), що зазнає плоского згину у вертикальній площині, при втраті стійкості додатково до згину з'являється кручення. Кільце, що завантажене радіальним розподіленним навантаженням (рис. 18, б) зазнає стиску. При втраті стійкості колова форма кільця порушується, отже додатково до стиску з'являється згин.

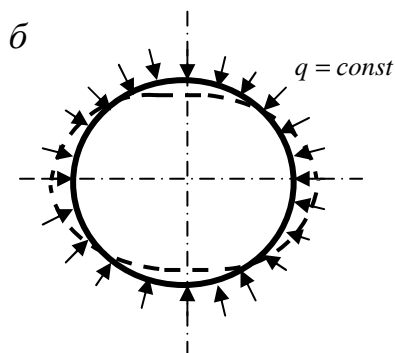
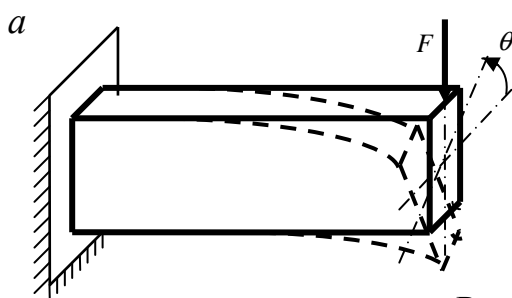


Рисунок 18

Теоретично перехід системи у нове положення можливий лише якщо примусово вивести його з висхідного стану. Насправді це відбувається самостійно через так звані початкові недосконалості (неточність форми та розмірів тіла, неоднорідність властивостей матеріалу, відхилення у прикладанні навантаження). У нашому курсі ці початкові недосконалості вважаються малими, такими, що не позначаються на величині критичної сили.

2.1.2 Ступені вільності

Кількість ступенів вільності W у розрахунках на стійкість – це кількість незалежних параметрів, які визначають положення системи у суміжному стані.

Пружний стержень на рисунку 19, а при втраті стійкості згинається так, що точка його осі на відстані x одержує переміщення y . Кількість таких точок нескінченна, отже $W = \infty$. Наявність пружної опори (рис. 19, б) надає точкам додаткові переміщення за рахунок її осідання $y = y_{cm} + y_{on}$, і так само у цьому випадку $W = \infty$. Отже, якщо система має у своєму складі хоча би один пружний стержень, число її ступенів вільності дорівнює нескінченності.

Якщо переміщення від осідання опор суттєво менші, ніж переміщення від згину стержня, останніми можна знехтувати. У цьому випадку (рис. 19, в) переміщення усіх точок визначаються одним параметром і $W = 1$.

Система абсолютно жорстких стержнів з двома пружними опорами (рис. 19, г) має $W = 2$. Дійсно, суміжний стан визначається двома параметрами v_1, v_2

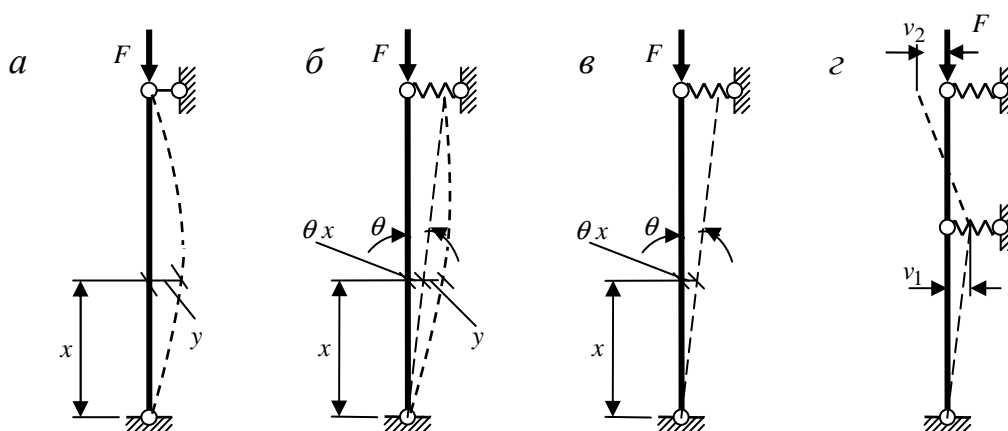


Рисунок 19

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть види рівноваги.
2. Що таке стійкість?
3. Які розрізняють види стійкості?
4. Що таке суміжна форма рівноваги?
5. Що таке критична сила?
6. Яка основна мета розрахунків на стійкість?
7. Що таке стійкість «у малому» і «у великому»?
8. Яка різниця у визначенні числа ступенів вільності у розрахунках на стійкість та при проведенні кінематичного аналізу?

2.2 Методи розрахунку на стійкість

Розрізняють три метода розрахунку на стійкість: динамічний, енергетичний та статичний.

2.2.1 Динамічний метод

Динамічний метод ґрунтується на вивченні коливань системи, виведеної з вихідного положення при подальшій відсутності збуджуючого фактору. У цьому випадку система здійснює вільні коливання. При навантаженні, меншому, ніж критичне, коливання будуть затухаючими і система повернеться згодом у вихідне положення. Навпаки, наявність зростання амплітуди вільних коливань системи свідчить про перехід системи через критичний стан. Навантаження, що відповідає такому переходу є критичним. Динамічний метод є найбільш загальним. Він може бути застосований для розрахунку як консервативних, так і для неконсервативних систем. Але через складність розрахунків цей метод не має широкого застосування для вирішення практичних задач стійкості. Нагадаємо, що консервативні – це системи, у яких відсутнє розсіювання енергії. При розрахунках будівельних конструкцій зазвичай вважають їх консервативними. Прикладом неконсервативної системи може бути така, у якій необхідно враховувати тертя в шарнірах.

2.2.2 Енергетичний метод

Цей метод ґрунтується на використанні енергетичного критерію стійкості, що визначається теоремами Лагранжа-Дирихле і Ляпунова. Наведемо ці теореми у спрощеному формулюванні.

Теорема Лагранжа-Дирихле. Якщо у стані рівноваги консервативної системи її потенціальна енергія мінімальна порівняно з потенціальною енергією суміжних станів, цей стан стійкий.

Теорема Ляпунова. Якщо потенціальна енергія консервативної системи у стані рівноваги не мінімальна порівняно з потенціальною енергією суміжних станів, цей стан нестійкий.

Відповідно до цих теорем для пружної системи, що знаходиться у стані стійкої рівноваги, варіація повної потенціальної енергії повинна задовольняти умовам

$$\delta U_{\text{повн}} = 0: \delta^2 U_{\text{повн}} > 0.$$

Ці умови можна спростити, якщо за початок відліку потенціальної енергії узяти її значення у висхідному стані. Тоді, вважаючи початкові недовершеності малими так, що $U_{0 \text{ повн}} = 0$, одержуємо приріст потенціальної енергії при переході у суміжний стан таким:

$$\Delta U_{\text{повн}} = U_{\text{повн}} - U_{0 \text{ повн}} = U_{\text{повн}}.$$

З урахуванням того, що повна потенціальна енергія виражається сумою робіт внутрішніх U та зовнішніх W сил при переході з суміжного у висхідний стан, одержуємо енергетичний критерій стійкості у вигляді принципу можливих переміщень:

$$U_{\text{повн}} = W + U = 0. \quad (29)$$

Застосування енергетичного методу розглянемо на прикладі абсолютно жорсткого прямого стиснутого стержня, на кінці якого є пружне затиснення (рис. 20, а). Жорсткість пружного затиснення, тобто реактивний момент, який виникає в ній при повороті на кут $\theta = 1$, позначимо c .

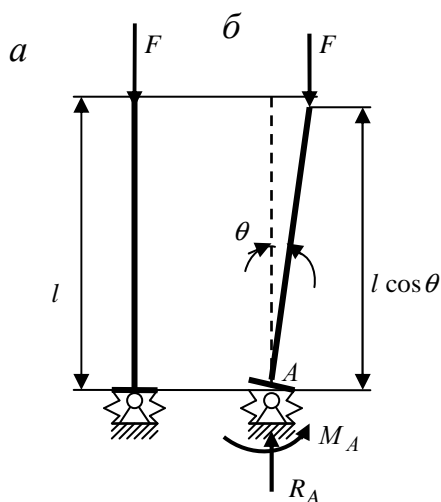


Рисунок 20

Втрата стійкості стержня відбувається переходом його у суміжне прямолінійне положення, що визначається кутом θ (рис. 20, б), отже система має ступінь вільності $W = 1$. При переході з суміжного стану у висхідний сила F , переміщуючись доверху, здійснює від'ємну роботу, яка становить $W = -Fl(1 - \cos \theta)$. Реактивний момент у пружному затисненні пропорційний куту поворота $M_A = c \theta$ і здійснює роботу

$$U = \frac{1}{2} M_A \theta = \frac{c \theta^2}{2}.$$

Отже, умова (29) у цій задачі має такий вигляд:

$$-F l(1 - \cos \theta) + \frac{c \theta^2}{2} = 0. \quad (30)$$

Враховуючи, що вища степінь нескінченно малого кута θ у цьому виразі дорівнює двом, розкладаємо $\cos \theta$ у степеневий ряд і утримуємо у цьому розкладанні величини до другого порядку мализни. Тоді маємо:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

і (30) набуває такого вигляду:

$$-F l(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}) + \frac{c \theta^2}{2} = -F l \frac{\theta^2}{2} + \frac{c \theta^2}{2} = 0.$$

Одержане рівняння стійкості дає такий розв'язок:

$$F_{кр} = \frac{c}{l}.$$

2.2.3 Статичний метод

При втраті стійкості система переходить у новий – суміжний стан рівноваги. Статичний метод або метод Ейлера полягає у застосуванні умов рівноваги до суміжного стану.

Розглянемо систему двох абсолютно жорстких прямих стиснутих стержнів на пружних опорах (рис. 21, а).

Втрата стійкості відбувається за рахунок осідання пружних опор (рис. 21, б). Положення усіх точок системи у суміжному стані повністю визначається двома параметрами, наприклад величинами v_1, v_2 переміщень опорних точок системи. Отже ця система має два ступеня вільності.

При втраті стійкості пружні опори деформуються і в них виникають реакції пропорційні величинам осідання:

$$R_1 = c v_1; \quad R_2 = c v_2.$$

Запишемо рівняння рівноваги системи у суміжному стані:

$$\begin{aligned} \sum y &= 0; & R_A - R_1 + R_2 &= 0; \\ \sum x &= 0; & V_A - F &= 0; \\ \sum M_A &= 0; & R_1 l - R_2 (l + l) + F v_2 &= 0. \end{aligned}$$

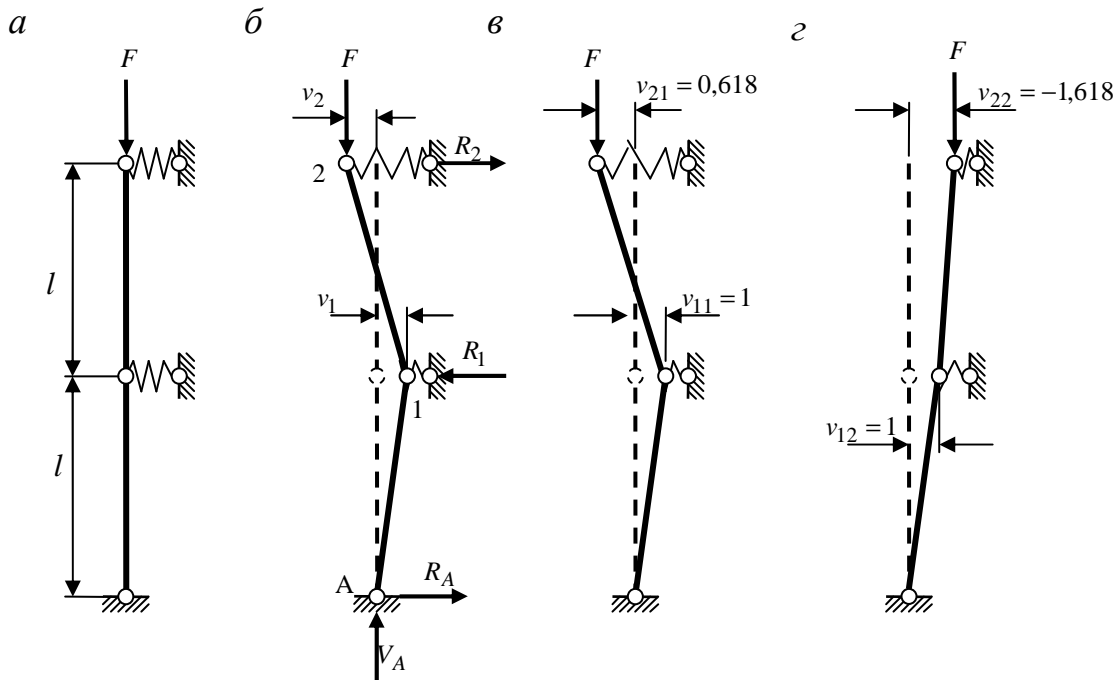


Рисунок 21

Одержані три рівняння рівноваги системи містять чотири невідомих реакції, тому додатково складаємо рівняння рівності нулю згинаючого моменту у шарнірі 1:

$$\sum_{\text{верхи}} M_1 = 0; \quad -R_2 l + F(v_1 + v_2) = 0.$$

Розглядаємо окремо це рівняння та третє рівняння рівноваги системи. Після підстановки в них реакцій, виражених через переміщення опорних точок, одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} c v_1 l - c v_2 \cdot 2l + F v_2 &= 0; \\ -c v_2 l + F(v_1 + v_2) &= 0. \end{aligned}$$

Виконавши групування елементів за невідомими переміщеннями v_1, v_2 , одержимо систему двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно цих переміщень:

$$\begin{aligned} c l v_1 + (F - 2c l) v_2 &= 0; \\ F v_1 + (F - c l) v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Оскільки $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$, розв'язок системи одержуємо з умови рівності нулю її визначника:

$$\begin{vmatrix} c l & (F - 2c l) \\ F & (F - c l) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, одержуємо рівняння стійкості розглянутої стержневої системи:

$$cl(F - cl) - F(F - 2cl) = 0$$

або

$$F^2 - 3clF + c^2l^2 = 0.$$

Це рівняння другої степені відносно F має два кореня – дві критичні сили:

$$F = \frac{3cl}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{3cl}{2}\right)^2 - c^2l^2} = \begin{cases} 0,382cl; \\ 2,618cl. \end{cases} \quad (32)$$

Як впливає з (31), абсолютні значення переміщень залишаються невизначеними і можна знайти лише їх співвідношення. Так, з першого рівняння (31) маємо:

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{cl}{F - 2cl}, \quad (33)$$

$$\text{з другого:} \quad \frac{v_2}{v_1} = -\frac{F}{F - cl}. \quad (34)$$

Проаналізуємо ці співвідношення при одержаних значеннях сили. Підставляючи перший корінь (32) у (33), одержимо:

$$\frac{v_{21}}{v_{11}} = -\frac{cl}{0,382cl - 2cl} = 0,618.$$

Отже, якщо прийняти $v_{11} = 1$, друга точка системи переміститься на величину $v_{21} = 0,618$ і система набуває вигляду, показаного на рисунку 21, в. Ця форма системи, що відповідає першому кореню рівняння стійкості, називається *першою формою втрати стійкості*. Неважко упевнитись, що (34) дає таке саме значення співвідношення переміщень опорних точок.

Підставивши другий корінь (32) у (33) або (34), одержимо:

$$\frac{v_{22}}{v_{12}} = -\frac{cl}{2,618cl - 2cl} = -1,618.$$

Вид системи, що відповідає другому кореню рівняння стійкості, або *друга форма втрати стійкості* наведена на рисунку 21, г.

Залежність між навантаженням та переміщенням v_2 при додатних зміщеннях v_1 схематично наведена на рисунку 22.

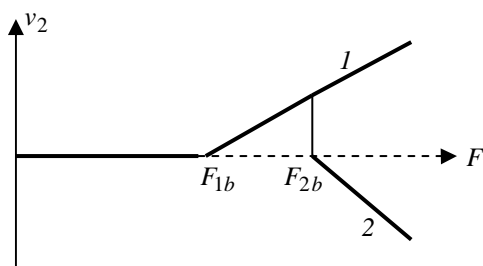


Рисунок 22

Кореням рівняння стійкості $F_{1b} = 0,618cl$; $F_{2b} = 2,618cl$ відповідають точки розгалуження (біфуркації) форм рівноваги системи.

Відповідні значення сил називають *біфуркаційними*.

При $F < F_{1b}$ стійкою формою рівноваги є висхідна прямолінійна форма. При $F_{1b} < F < F_{2b}$ стійкою формою рівноваги є суміжна форма при $v_2 > 0$ (лінія 1 на рис. 22). Висхідна прямолінійна форма є нестійкою і можлива лише теоретично або при закріпленні стержня від переміщень. Другу форму рівноваги можна одержати при $F > F_{2b}$ (лінія 2 на рис. 22) примусовим зміщенням опорних точок стержнів. Ця форма є стійкою так само, як теоретично стійкою продовжує залишатися перша форма рівноваги. Отже при $F > F_{2b}$ теоретично можливі три форми рівноваги.

Відзначимо, що кількість форм втрати стійкості і, відповідно, кількість біфуркаційних сил дорівнює кількості ступенів вільності системи, отже, при $W = \infty$ вона нескінченна.

Зважаючи на проведений аналіз можна зробити висновок, що *критичною силою системи є найменша з біфуркаційних сил*. У розглянутому прикладі маємо:

$$F_{кр} = \min(F_{1b}; F_{2b}) = F_{1b} = 0,382cl.$$

Запитання для самоконтролю

1. На чому ґрунтується динамічний метод розрахунку на стійкість?
2. Що є енергетичним критерієм стійкості?
3. Як одержують енергетичний критерій стійкості у вигляді принципу можливих переміщень?
4. Чим вимірюється жорсткість пружної опори?
5. У чому суть методу Ейлера розрахунків на стійкість?
6. Який зв'язок між кількістю ступенів вільності, кількістю біфуркаційних сил та кількістю форм втрати стійкості?
7. Як співвідносяться між собою критична сила системи та біфуркаційні сили?

2.3 Стійкість прямого стиснутого стержня

2.3.1 Стійкість прямого стиснутого стержня з шарнірним закріпленням кінців. Формула Ейлера

Розглянемо прямий стиснутий стержень постійної жорсткості (рис. 23, а). нагадаємо, що такий стержень має нескінченну кількість ступенів вільності.

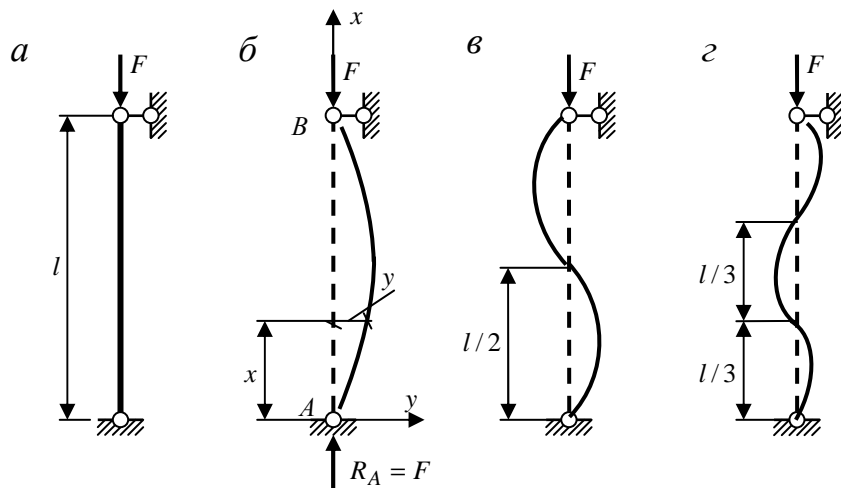


Рисунок 23

Застосовуючи статичний метод, визначаємо, що горизонтальні реакції відсутні, а вертикальна дорівнює стискаючій силі. Далі застосовуємо рівняння рівноваги нескінченно малого елемента стержня, відоме з опору матеріалів як наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стержня:

$$EI y'' = M.$$

Згинаючий момент у перерізі стержня в суміжному стані $M = -F y$. Отже диференціальне рівняння набуває такого вигляду:

$$EI y'' = -F y \quad (35)$$

або

$$EI y'' + F y = 0. \quad (35,a)$$

Поділивши члени рівняння на EI , введемо позначення

$$n^2 = \frac{F}{EI}. \quad (36)$$

Тепер рівняння (35, a) набуває стандартного вигляду однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' + n^2 y = 0. \quad (37)$$

Розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx. \quad (38)$$

Запишемо граничні умови:

1) при $x = 0$ $y = 0$; 2) при $x = l$ $y = 0$.

З першої умови одержимо $C_2 = 0$, з другого $C_1 \sin nl = 0$.

Звідси, оскільки $C_1 \neq 0$, одержуємо рівняння стійкості

$$\sin nl = 0.$$

Розв'язок цього рівняння дає нескінченний ряд:

$$nl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, k\pi; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (39)$$

Нульове рішення відкидаємо як таке, що відповідає висхідному стану. Тоді беремо перше ненульове рішення $n_1 l = \pi$. Тепер з (36) одержуємо $\sqrt{\frac{F_{1кр}}{EI}} \cdot l = \pi$ і, далі:

$$F_{1кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Підставимо $n_1 = \frac{\pi}{l}$ у (38). З урахуванням $C_2=0$ одержимо функцію прогинів стержня при втраті стійкості за першою формою:

$$y_1 = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Отже першій формі втрати стійкості стержня відповідає згинання за однією половиною хвилі синусоїди (рис. 23, б).

Другому кореню (39) рівняння стійкості відповідають такі співвідношення:

$$n_2 = \frac{2\pi}{l}; \quad F_{2кр} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}; \quad y_2 = C_1 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Останнє співвідношення окреслює другу форму втрати стійкості за двома півхвилями синусоїди (рис. 23, в).

Продовжимо аналіз для третього розв'язку (39):

$$n_3 = \frac{3\pi}{l}; \quad F_{3кр} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}; \quad y_3 = C_1 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Відповідна форма втрати стійкості наведена на рисунку 23, в і містить три півхвилі синусоїди.

Отже для розрахунку системи з нескінченним числом ступенів вільності необхідно скласти диференціальні рівняння. Розв'язок задачі дає нескінченну кількість критичних (біфуркаційних) сил і відповідних форм втрати стійкості.

Як впливає з визначення критичною силою системи є найменша з біфуркаційних сил:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (40)$$

Ця формула носить ім'я *Ейлера*.

Зауважимо, що як і в прикладі, розглянутому в п. 2.2.3, вищі форми втрати стійкості можливі лише в тому випадку, якщо на систему накласти додаткові в'язі. *Постановка додаткових в'язей приводить до збільшення жорсткості системи, а отже і до збільшення критичної сили.*

При визначенні критичної сили було використане наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стержня. Це рівняння достатньо задовільно описує поведінку стержня до критичного навантаження. У випадках значної гнучкості стержня матеріал при втраті стійкості продовжує знаходитись в межах пружної стадії роботи. В такому разі у суміжному стані він знаходиться у рівновазі і може знадобитись вивчення позакритичного стану. Це можна зробити лише застосовуючи точне рівняння зігнутої осі:

$$\frac{EI}{\rho} = M.$$

Аналіз позакритичного стану можна знайти, наприклад у [11].

2.3.2 Критична сила для прямого стиснутого стержня при різних закріпленнях кінців

Формулу Ейлера (40) можна поширити на інші варіанти закріплення кінців стержня. Для цього звернемо увагу на те, що форми втрати стійкості шарнірно закріпленого стержня (рис. 23) різняться одна від одної кількістю півхвиль синусоїди, що укладаються при згині за довжиною стержня. Кожна частина стержня l_c , на якій міститься одна півхвиля синусоїди поводить себе так само, як окремий шарнірно закріплений стержень довжиною l_c . Дійсно, при другій формі втрати стійкості маємо:

$$l_c = 0,5l, \text{ отже } F_{2кр} = \frac{\pi^2 Ei}{(0,5l)^2} = \frac{4\pi^2 Ei}{l^2},$$

при третій:

$$l_c = \frac{l}{3}, \text{ отже } F_{3кр} = \frac{\pi^2 EI}{(l/3)^2} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}.$$

Відповідно до цього можна записати формулу для критичної сили при різних закріпленнях його кінців. Позначивши через μ частку довжини стержня, на якій при втраті стійкості міститься одна півхвиля синусоїди застосуємо формулу Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (41)$$

Коефіцієнт μ називають *коефіцієнтом зведення довжини*. Його значення для різних випадків закріплення стержня наведені на рисунку 24.

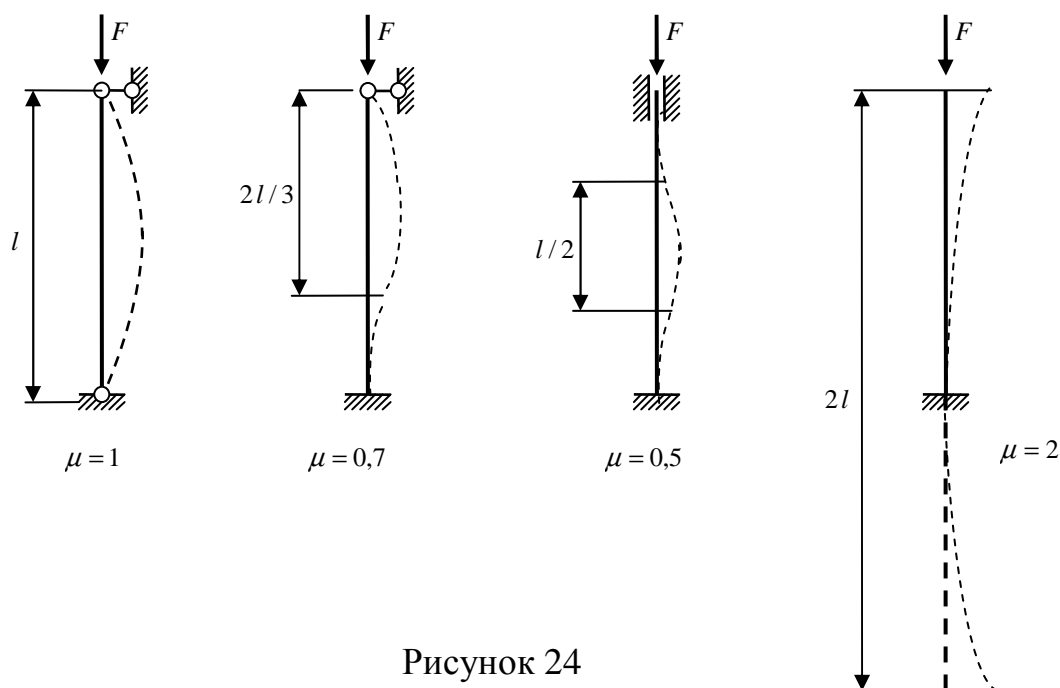


Рисунок 24

2.3.3 Критичні напруження. Стійкість за межею пружності

Критичне напруження відповідає критичному навантаженню. З урахуванням (41) маємо:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}. \quad (42)$$

Нагадаємо, що вираз (41) був одержаний з припущенням пружної роботи матеріалу, тому напруження (42) не повинні перевищувати межі пропорційності:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}. \quad (43)$$

Введемо позначення

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\mu l)^2 A}{I}} = \frac{\mu l}{i} \quad (44)$$

- гнучкість стержня,

де $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ - радіус інерції перерізу.

Після підстановки (43) в (44) одержимо:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

звідки граничне значення гнучкості, за якого матеріал при втраті стійкості працює в пружній стадії буде таким:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E_{\kappa} I}{(\mu l)^2} \quad (48)$$

$$\text{Відповідно } \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_{\kappa}}{\lambda^2}.$$

Для спрощеного обчислення критичних напружень за межею пружності Ясинський запропонував емпіричну формулу:

$$\sigma_{кр} = a - b \lambda. \quad (49)$$

Наприклад, для сталі Ст.3 $a = 310$; $b = 1,14$.

Якщо критичні напруження, визначені за (49), перевищують межу текучості σ_m , стержень втратить міцність раніше, ніж стійкість.

Для сталі Ст.3 залежність між критичною силою і гнучкістю відображається графіком, наведеним на рисунку 26.

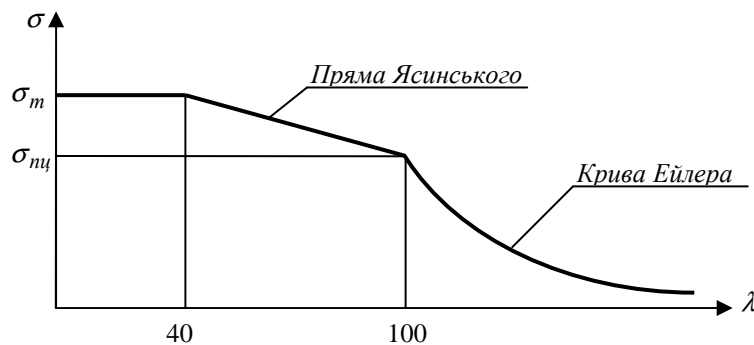


Рисунок 26

2.3.4 Розрахунок стержнів на стиск з урахуванням стійкості

В інженерній практиці розрахунок стержнів на стиск поєднують з розрахунком на стійкість. Для цього значення допустимого напруження приймають зменшеним, вводячи коефіцієнт φ :

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi [\sigma]. \quad (50)$$

Коефіцієнт φ називають *коефіцієнтом поздовжнього згину*. Він залежить від матеріалу та гнучкості стержня. Його значення для сталі Ст.3 такі:

λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

При застосуванні (50) для підбору перерізу стержня спочатку задаються деяким значенням φ_0 і знаходять потрібну площу перерізу. Далі для

прийнятого перерізу обчислюють гнучкість і знаходять нове значення коефіцієнту. Розрахунок продовжують до виконання умови (50) при черговому значенні φ .

2.3.5 Метод початкових параметрів

Для стержня постійної жорсткості при незмінній за довжиною поздовжньою силою розв'язок диференціального рівняння можна одержати у вигляді методу початкових параметрів.

Розглянемо ділянку такого стержня довжиною l жорсткістю $EI = \text{const}$ з поздовжньою стискаючою силою N (рис. 27).

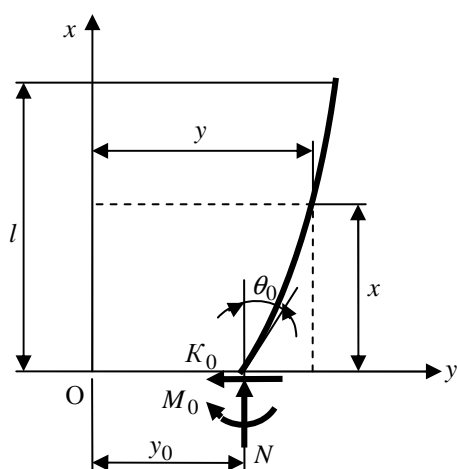


Рисунок 27

Систему координат обираємо з початком на нижньому кінці стержня у недеформованому стані, вісь x спрямована вздовж недеформованої осі стержня, вісь y – праворуч. У суміжному викривленому стані на початку координат діють згинаючий момент M_0 , поздовжня сила N та умовна (перпендикулярна до осі стержня у недеформованому стані) поперечна сила R_0 . Прогин та кут повороту

перерізу на початку координат становить відповідно y_0 та θ_0 . Величини M_0 , R_0 , y_0 , θ_0 називають *початковими параметрами*.

Згинаючий момент у довільному перерізі на відстані x від початку в суміжному стані

$$M = -M_0 - R_0 x - N(y - y_0)$$

і диференціальне рівняння пружної лінії запишеться так:

$$EI y'' = -M_0 - R_0 x - N(y - y_0).$$

Поділивши усі члени рівняння на EI і позначивши, як зазвичай, $n^2 = \frac{N}{EI}$,

одержимо диференціальне рівняння у такому вигляді:

$$y'' + n^2 y = n^2 y_0 - n^2 \frac{M_0}{N} - n^2 \frac{R_0}{N} x. \quad (51)$$

Розв'язок цього лінійного неоднорідного рівняння другого порядку складається із загального рішення однорідного рівняння (без правої частини) та будь-якого частинного рішення неоднорідного рівняння і має такий вигляд:

$$y = C_1 \sin n\theta + C_2 \cos n\theta + y_0 - \frac{M_0}{N} - \frac{R_0}{N} x. \quad (52)$$

Для визначення довільних констант використаємо такі граничні умови: при $x=0$ $y = y_0$ та $y' = \theta_0$.

З першої умови одержимо $C_2 = \frac{M_0}{N}$.

Перша похідна від (52) буде така:

$$y' = C_1 n \cos n\theta - C_2 n \sin n\theta - \frac{R_0}{N},$$

отже друга гранична умова дає $C_1 n - \frac{R_0}{n} = 0$, звідки $C_1 = \frac{\theta_0}{n} + \frac{R_0}{nN}$.

Після підстановки коефіцієнтів C_1 , C_2 та зведення доданків остаточно одержимо рівняння прогинів у формі методу початкових параметрів:

$$y = y_0 + \theta_0 \frac{\sin nx}{n} + \frac{M_0}{N} (\cos nx - 1) + \frac{R_0}{N} \left(\frac{\sin nx}{n} - x \right). \quad (53)$$

Диференціюючи (53) за x , одержимо кути повороту та згинаючі моменти:

$$\theta = y' = \theta_0 \cos nx - \frac{M_0}{N} n \sin nx + \frac{R_0}{N} (\cos nx - 1); \quad (54)$$

$$M = EI y'' = -EI \theta_0 n \sin nx - M_0 \cos nx - R_0 \frac{\sin nx}{n}. \quad (55)$$

Метод можна застосувати для розрахунку стержнів, що складаються з кількох ділянок. Для цього при переході через точки стрибкоподібної зміни кута повороту $\Delta\theta$, згинаючого моменту ΔM та поперечної сили ΔR необхідно ввести відповідні доданки. Рівняння (53), (54), (55) набувають такого вигляду:

$$y = y_0 + \theta_0 \frac{\sin nx}{n} + \frac{M_0}{N} (\cos nx - 1) + \frac{R_0}{N} \left(\frac{\sin nx}{n} - x \right) + \Delta\theta \frac{\sin nx_\theta}{n} + \frac{\Delta M}{N} (\cos nx_M - 1) + \frac{\Delta R}{N} \left(\frac{\sin nx_R}{n} - x_R \right); \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \theta = & \theta_0 \cos nx - \frac{M_0}{N} n \sin nx + \frac{R_0}{N} (\cos nx - 1) + \Delta\theta \cos nx_\theta - \\ & - \frac{\Delta M}{N} n \sin nx_M + \frac{\Delta R}{N} (\cos nx_R - 1); \end{aligned} \quad (57)$$

$$M = -EI \theta_0 n \sin nx - M_0 \cos nx - R_0 \frac{\sin nx}{n} - EI \Delta \theta n \sin nx_\theta - \Delta M \cos nx_M - \Delta R \frac{\sin nx_R}{n}. \quad (58)$$

У наведених виразах x_θ, x_m, x_R - координати перерізу відраховані від точок розміщення стрибків відповідно кута повороту, момента та умовної поперечної сили.

Для прикладу розглянемо стержень, наведений на рисунку 28, а. Форма втрати стійкості та реакції опор показані на рисунку 28, б.

На початку стержня при $x = 0$ маємо: $y = y_0 = 0$; $M = M_0 = 0$; $R_0 = -R$.

Поздовжня сила в перерізах $N = F$.

Отже, для довільного перерізу при $x > l$ рівняння прогинів та згинаючих моментів мають такий вигляд:

$$y = \theta_0 \frac{\sin nx}{n} - \frac{R}{F} \left(\frac{\sin nx}{n} - x \right) + \frac{R}{F} \left(\frac{\sin n(x-l)}{n} - (x-l) \right);$$

$$M = -EI \theta_0 n \sin nx + R \frac{\sin nx}{n} - R \frac{\sin n(x-l)}{n}.$$

Оскільки у цих рівняннях маємо два невідомі (θ_0 та R), необхідно використати дві граничні умови. Такими є умова відсутності прогинів на опорі при $x = l$ та умова відсутності згинаючого моменту на кінці стержня при $x = l + c$.

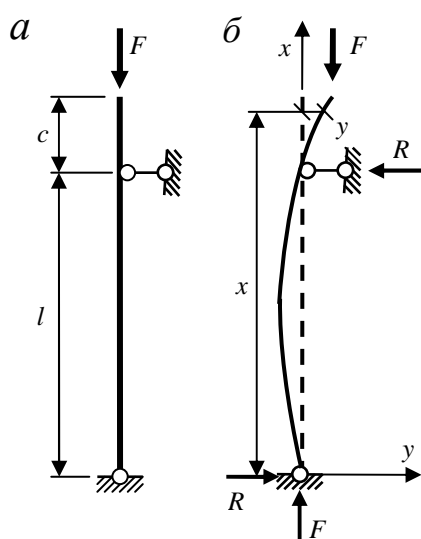


Рисунок 28

Ці умови дають такі рівняння:

$$\theta_0 \frac{\sin nl}{n} - \frac{R}{F} \left(\frac{\sin nl}{n} - l \right) = 0;$$

$$-EI \theta_0 n \sin n(l+c) + R \left(\frac{\sin n(l+c)}{n} - \frac{\sin nc}{n} \right).$$

Визначник одержаної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin nl}{n} & -\frac{1}{F} \left(\frac{\sin nl}{n} - l \right) \\ -EI n \sin n(l+c) & \left(\frac{\sin n(l+c)}{n} - \frac{\sin nc}{n} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник замінимо $F = n^2 EI$. У результаті одержимо рівняння стійкості:

$$\frac{\sin nl}{n} \left(\frac{\sin n(l+c) - \sin nc}{n} \right) - \sin n(l+c) \frac{1}{n} \left(\frac{\sin nl - nl}{n} \right) = 0$$

або
$$\sin nl \cdot (\sin n(l+c) - \sin nc) = \sin n(l+c) \cdot (\sin nl - nl).$$

Наприклад, при $c = 0,25l$ одержимо рівняння

$$\sin nl \left(\sin \frac{5nl}{4} - \sin \frac{nl}{4} \right) = \sin \frac{5nl}{4} (\sin nl - nl),$$

перший ненульовий корінь якого становить $nl = 1,754$ і $F_{кр} = 3,08 \frac{EI}{l^2}$.

2.3.6 Деформаційний розрахунок стержнів

Розглянемо стержень, на який одночасно діють поздовжні та поперечні сили (рис. 29). Зазвичай моментами поздовжньої сили F у відносно центру ваги зігнутого стержня нехтують і вважають, що ця сила призводить лише до центрального стиску стержня. При великих поздовжніх силах нехтування впливу поздовжньої сили на величину згинаючих моментів може призвести до значних похибок. Деформацію, що є результатом сумісної дії поздовжніх та поперечних сил, називають *поздовжньо-поперечним згином*.

Для розглянутого стержня згинаючі моменти у деформованому стані визначаються так:

$$M = -M^0 - F y, \quad (59)$$

де M^0 - згинаючий момент від поперечного навантаження або балочний момент.

З урахуванням (50) рівняння (35) набуває такого вигляду:

$$EI y'' + F y = -M^0. \quad (60)$$

Виконуючи звичайні перетворення, з урахуванням позначення $n^2 = \frac{F}{EI}$, одержимо таке рівняння

$$y'' + n^2 y = -\frac{M_0}{EI}. \quad (61)$$

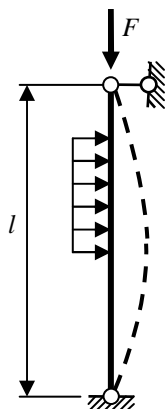


Рисунок 29

Загальний розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx - \frac{M_0}{n^2 EI}. \quad (62)$$

З урахуванням граничних умов для стержня з обома шарнірно закріпленими кінцями маємо:

$$y = -\frac{M_0}{n^2 EI} \left(1 - \cos nx - \frac{1 - \cos nl}{\sin nl} \sin nx \right). \quad (63)$$

Як бачимо, прогин нелінійно залежить від параметра n , а отже і від сили F . Звідси випливає, що принцип незалежності для поперечного та поздовжнього навантаження при поздовжньо-поперечному згині недійсний.

Відзначимо, що прогин залежить лінійно від M_0 , отже при фіксованій поздовжній силі для поперечних навантажень виконується принцип незалежності.

Слід пам'ятати, що рівняння (61) одержане у припущенні, що напруження не перевищують межі пропорційності, а прогини малі. При відмові від цих припущень задача приводить до фізично і геометрично нелінійних диференціальних рівнянь, що значно ускладнює їх розв'язання.

Запитання для самоконтролю

1. Як виглядає рівняння рівноваги нескінченно малого елемента зігнутого стержня?
2. Наведіть формулу Ейлера для стержня з шарнірними кінцями.
3. Як окреслена вісь стиснутого стержня при втраті стійкості?
4. Чому дорівнюють кількості критичних (біфуркаційних) сил, форм втрати стійкості та ступенів вільності для пружного стиснутого стержня?
5. Що таке коефіцієнт зведення довжини стиснутого стержня? Як його визначають та які значення він має?
6. Наведіть формулу Ейлера для стиснутого стержня при різних закріпленнях його кінців.
7. Як визначаються критичні напруження?
8. Для чого застосовується формула Ясинського?
9. Як в інженерній практиці виконується розрахунок стиснутих стержнів з урахуванням стійкості?
10. Як визначається гнучкість стержня?
11. У чому суть методу початкових параметрів?
12. Що таке поздовжньо-поперечний згин?
13. Чи можна застосувати принцип незалежності при розрахунку на поздовжньо-поперечний згин?

2.4 Наближені методи розрахунку на стійкість

Серед наближених методів перш за все можна виділити методи, які ґрунтуються на використанні енергетичного критерію стійкості. До них відноситься метод Рітца-Тимошенка. Енергетичну трактовку можна дати також методу Бубнова-Гальоркіна. Наближеність цих методів визначається тим, що при одержанні розв'язку необхідно задаватись деякою формою втрати стійкості.

До інших можна віднести методи, які базуються на чисельних методах розв'язання диференціальних рівнянь. Таким є, наприклад, метод скінченних різниць.

І, нарешті, існують методи, у яких наближеність визначається заміною складних залежностей більш простими, наприклад нелінійних лінійними.

2.4.1 Метод Рітца- Тимошенка

У методі Рітца-Тимошенка формою втрати стійкості задаються у вигляді ряду:

$$y = \sum_{i=2}^n a_i f_i(x), \quad (64)$$

де $f_i(x)$ - лінійно незалежні функції, які задовольняють кінематичним граничним умовам;

a_i - деякі коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Запишемо вираз повної потенціальної енергії у вигляді (29):

$$U_{\text{повн}} = U + W. \quad (65)$$

При переході з суміжного до висхідного стану внутрішні сили (рис. 30, а) виконують роботу

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l M d\theta = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI}.$$

Записуючи згинаючий момент у перерізі стержня як добуток сили F на момент від одиничного значення цієї сили ($M = F \cdot \bar{M}$), одержимо:

$$U = \frac{F^2}{2} \int_0^l \frac{\bar{M}^2 dx}{EI}.$$

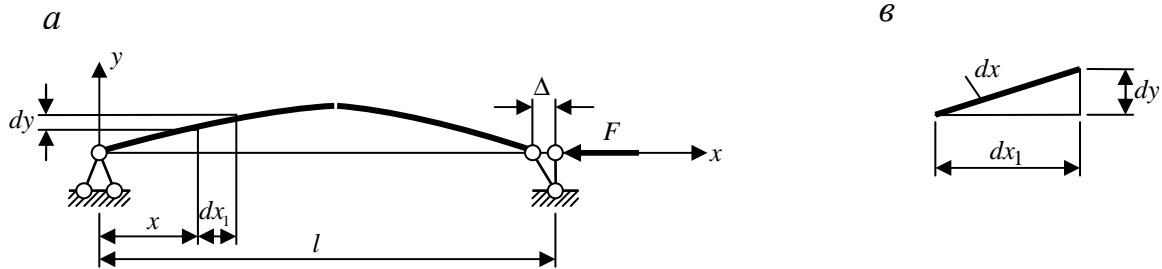


Рисунок 30

При цьому зовнішня сила виконує роботу $W = -F \Delta$.

Скорочення відстані між кінцями ділянки стержня довжиною dx за рахунок згину осі становить (рис. 30, в):

$$dx - dx_1 = dx - \sqrt{dx^2 - dy^2} = dx \left[1 - \sqrt{1 - (y')^2} \right] \approx \frac{1}{2} (y')^2 dx.$$

Отже переміщення сили вздовж осі стержня становить

$$\Delta = \int_0^l (dx - dx_1) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx,$$

а робота зовнішніх сил набуває такого вигляду:

$$W = -\frac{F}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

Тепер (65) набуває такого вигляду:

$$U_{\text{повн}} = \frac{F^2}{2} \int_0^l \frac{\bar{M}^2 dx}{EI} - \frac{F}{2} \int_0^l (y')^2 dx. \quad (66)$$

Після підстановки (64) у (66) умови екстремальності повної потенціальної енергії набувають такого вигляду:

$$\frac{\partial U_{\text{повн}}}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (67)$$

Рівняння (67) дають систему n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_i . Це пояснюється тим, що потенціальна енергія є квадратичною функцією переміщень, отже її похідні лінійно залежать від a_i .

Критичне навантаження далі знаходять з умови рівності нулю визначника системи рівнянь.

Для прикладу визначимо критичну силу для консольного стержня, жорсткість якого змінюється за законом $I = I_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right)$, де I_0 - момент інерції перерізу стержня у затисненні.

Потенціальна енергія для такого стержня має вигляд (66).

Задамося прогинами стержня у формі ряду

$$y = a_1 l x^2 / 2 - a_2 x^3 / 6. \quad (68)$$

Неважко упевнитись у тому, що кінематичні граничні умови задовольняються. Дійсно, при $x = 0$ $y = 0$; $y' = 0$.

Перша похідна прогину має такий вигляд: $y' = a_1 x - a_2 \frac{x^2}{2}$, а згинаючий момент від одиничної сили у довільному перерізі

$$\bar{M} = y - v = a_1 \frac{l}{2} (x^2 - l^2) - a_2 \frac{x^3 - l^3}{6}.$$

З урахуванням цього одержимо повну потенціальну енергію стержня:

$$\begin{aligned} U_{повн} &= \frac{F^2}{2EI} \int_0^l \left[a_1 \frac{l}{2} (x^2 - l^2) - a_2 \frac{x^3 - l^3}{6} \right]^2 \left(1 + \frac{x}{l} \right) dx - \frac{F}{2} \int_0^l \left(a_1 x - a_2 \frac{x^2}{2} \right)^2 dx = \\ &= F \left[\frac{Fl^7}{2EI_0} (0,175a_1^2 - 0,12936a_1a_2 + 0,02411a_2^2) - \frac{l^5}{2} (0,333a_1 - 0,25a_1a_2 + 0,05a_2^2) \right]. \end{aligned}$$

Після елементарних перетворень умови (67) рівності нулю частинних похідних повної потенціальної енергії набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} a_1 \left(0,175 \frac{Fl^2}{EI_0} - 0,3333 \right) - a_2 \left(0,06468 \frac{Fl^2}{EI_0} - 0,125 \right) = 0; \\ a_1 \left(0,06468 \frac{Fl^2}{EI_0} - 0,125 \right) - a_2 \left(0,02411 \frac{Fl^2}{EI_0} - 0,05 \right) = 0. \end{cases} \quad (69)$$

Розкриваючи визначник цих рівнянь приходимо до квадратного рівняння:

$$0,00003575 \left(\frac{Fl^2}{EI} \right)^2 - 0,0006159 \frac{Fl^2}{EI_0} + 0,00104 = 0,$$

розв'язок якого має два кореня: $F_1 = 1,96 \frac{EI_0}{l^2}$; $F_2 = 15,28 \frac{EI_0}{l^2}$.

Менший корінь дає значення критичної сили $F_{kp} = 1,96 \frac{EI_0}{l^2}$.

Зазвичай застосування наближеного виразу прогинів (64) означає накладання на систему додаткових в'язей, отже критична сила, знайдена за методом Рітца-Тимошенка, буде вище дійсної. Точність можна підвищити, якщо при виборі функцій $f_i(x)$ задовольняти не лише кінематичним, а і статичним граничним умовам. Точність також підвищується при збільшенні кількості членів ряду (64).

2.4.2 Метод Бубнова-Гальоркіна

За своєю суттю метод Бубнова-Гальоркіна є наближеним методом розв'язання диференціальних рівнянь. Метод ґрунтується на використанні властивостей ортогональних функцій. Дві функції $D(x)$ та $f(x)$ є ортогональними на відрізку $a \leq x \leq b$, якщо виконується умова

$$\int_a^b D(x)f(x)dx = 0. \quad (69)$$

Виходячи з цього функція $D(x)$, що відповідає лівій частині диференціального рівняння, наприклад

$$D(x) = EI y'' + F y = 0, \quad (70)$$

буде ортогональна до будь-якої функції оскільки при довільному значенні x вона дорівнює нулю.

Якщо підставити у диференціальне рівняння (70) прогини у вигляді ряду (64), умова (69) у загальному випадку виконуватись не буде:

$$\int_0^l \left[EI \sum_{i=1}^n a_i f_i''(x) + F \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right] \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) dx \neq 0.$$

Замість цього будемо вимагати щоб ліва частина диференціального рівняння була ортогональна хоча би до кожної з функцій $f_k(x)$ ряду (67):

$$\int_0^l \left[EI \sum_{i=1}^n a_i f_i''(x) + F \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right] \sum_{i=1}^n f_k(x) dx \neq 0; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{або } \sum_{i=1}^n a_i C_{ki} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (71)$$

$$\text{де } C_{ki} = \int_0^l [EI f_i''(x) + F f_i(x)] f_k(x) dx. \quad (72)$$

У результаті одержимо n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно a_i . Розв'язок цієї системи одержимо з умови рівності нулю її визначника.

Методу Бубнова-Гальоркіна можна дати енергетичну трактовку. Дійсно, ліва частина диференціального рівняння осі зігнутого стержня являє собою проекцію усіх сил, прикладених до елемента стержня на нормаль до його осі, а функції $f_i(x)$ - можливі переміщення цього елемента. Отже, умови (71) у такому випадку виражають принцип можливих переміщень.

Метод Бубнова-Гальоркіна є більш загальним, ніж метод Рітца-Тимошенка, оскільки він не потребує запису потенціальної енергії, а є

методом розв'язання диференціального рівняння. У зв'язку з цим метод може застосовуватися і для консервативних задач.

Недоліком методу є необхідність задовольняти усім граничним умовам задачі при виборі функцій $f_i(x)$. Але, якщо функції підібрані, рішення одержується простіше, ніж методом Рітца-Тимошенка.

2.4.3 Метод скінченних різниць

У цьому методі безперервна за своєю суттю функція прогинів замінюється скінченним набором значень у фіксованих точках. Похідні функції прогинів у такому разі виражаються через ці значення.

Розіб'ємо інтервал, на якому задана безперервна функція $y(x)$ на рівні ділянки довжиною h (рис. 31). Значення функції у точці i та навколо неї позначимо $y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}$. Запишемо першу похідну $y'(x_i)$ у точці i вважаючи, що пряма лінія, яка проходить через точки $(i-1), (i+2)$ кривої $y(x)$, паралельна дотичній до кривої у точці i :

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (73)$$

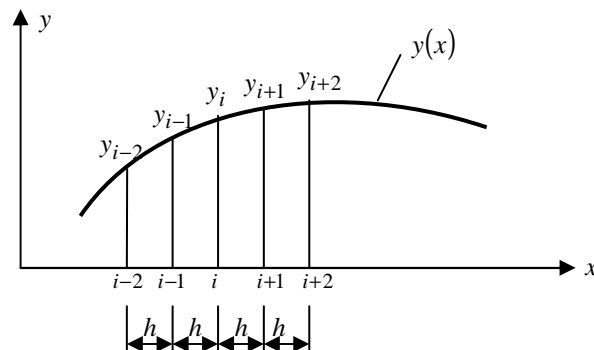


Рисунок 31

Другу похідну запишемо як похідну від першої похідної:

$$y''(x_i) = \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_{i-1}))}{2h} = \frac{(y_{i+2} - y_i)/2h - (y_i - y_{i-2})/2h}{2h} = \frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}}{4h^2}.$$

Скорочуючи інтервал удвічі, одержимо такий вираз другої похідної:

$$y''(x_i) = \frac{y_{i-1} - y_i + y_{i+1}}{h^2}. \quad (74)$$

З урахуванням (73), (74) складають диференціальні рівняння для усіх проміжних точок інтервалу. Разом з граничними умовами, вираженими також через фіксовані значення функцій, ці рівняння утворюють повну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно значень y_i . З умови

рівності нулю визначника цієї системи одержують рівняння стійкості. Кількість коренів рівняння стійкості дорівнює кількості проміжних точок інтервалу. Найменший з них дає значення критичної сили системи.

У якості прикладу знову розглянемо консольний стержень зі змінною жорсткістю $I = I_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$. Розіб'ємо його на дві ділянки (рис. 32, а) довжиною $h = l/2$.

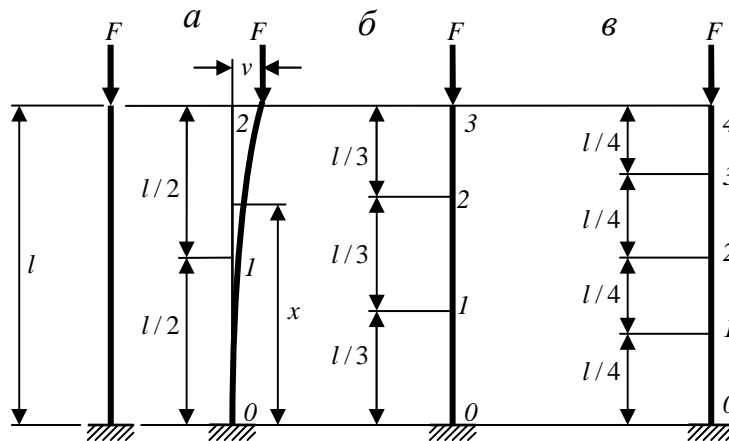


Рисунок 32

Диференціальне рівняння задачі має вигляд:

$$EI y'' + F y - F v = 0.$$

Для точки 1 запишемо його у скінченних різницях:

$$EI_1 \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(l/2)^2} + F y_1 - F v = 0.$$

Граничні умови задачі:

при $x = 0$ $y = y_0 = 0$; $y' = (y_1 - y_0)/(l/2) = 0$; при $x = l$ $v = y_2$, звідки

маємо: $y_0 = 0$; $y_1 = 0$; $v = y_2$. Враховуючи, що у точці 1 при $x = l/2$ $EI_1 = EI_0 / (1 + 1/2) = 0,6667 EI_0$, одержимо таке рівняння у скінченних різницях:

$$(2,67 EI_0 / l^2 - F) y_2 = 0, \text{ звідки } F_{kp} = 2,67 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Далі розглянемо варіант задачі при трьох ділянках (рис. 32, б). Диференціальні рівняння у скінченних різницях складаються для точок 1 та 2:

$$EI_1 \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(l/3)^2} + F y_1 - F v = 0;$$

$$EI_2 \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{(l/3)^2} + F y_2 - F v = 0.$$

Враховуючи граничні умови ($y_0 = y_1 = 0; v = y_3$) та значення жорсткостей ($EI_1 = EI_0 / (1 + 1/3) = 0,75EI_0$, $EI_2 = EI_0 / (1 + 2/3) = 0,6EI_0$), одержимо такі рівняння:

$$\begin{aligned}(6,75EI_0/l^2)y_2 - Fy_3 &= 0; \\ (F - 10,8EI_0/l^2)y_2 - (F - 5,4EI_0/l^2)y_3 &= 0.\end{aligned}$$

Розкриваючи визначник системи рівнянь

$$\begin{vmatrix} 6,75\frac{EI_0}{l^2} & -F \\ F - 10,8\frac{EI_0}{l^2} & -F + 5,4\frac{EI_0}{l^2} \end{vmatrix} = 0,$$

Приходимо до рівняння стійкості:

$$\left(-F + 5,4\frac{EI_0}{l^2}\right)\left(6,75\frac{EI_0}{l^2}\right) + F\left(F - 10,8\frac{EI_0}{l^2}\right) = 0$$

або

$$F^2 - 17,55\frac{EI_0}{l^2}F + 36,45\left(\frac{EI_0}{l^2}\right)^2 = 0.$$

Корені цього квадратичного рівняння такі:

$$F_1 = 2,41EI_0/l^2; F_2 = 15,15EI_0/l^2.$$

Менший з них дає значення критичної сили $F_{kp} = 2,41EI_0/l^2$.

При збільшенні кількості ділянок стержня до чотирьох (рис. 32, в) одержуємо ще більш уточнене значення критичної сили $F_{kp} = 2,27EI_0/l^2$. Подальше збільшення числа ділянок дозволить наблизитися до точного рішення.

Запитання для самоконтролю

1. У якому вигляді приймають функцію прогинів стержня в методах Рітца-Тимошенка та Бубнова-Гальоркіна?
2. Яким граничним умовам повинні задовольняти функції ряду прогинів у методі Рітца-Тимошенка? У методі Бубнова-Гальоркіна?
3. Який критерій стійкості використовується у методі Рітца-Тимошенка?
4. На чому ґрунтується метод Бубнова-Гальоркіна?
5. З якої умови одержують рівняння відносно параметрів ряду прогинів у методі Бубнова-Гальоркіна?
6. Чи можна методу Бубнова-Гальоркіна дати енергетичну трактовку?

7. Як можна збільшити точність розрахунків у методах Рітца-Тимошенка та Бубнова-Гальоркіна?
8. На чому ґрунтується метод скінченних різниць?
9. Як записуються похідні у методі скінченних різниць?
10. Скільки рівнянь необхідно записати у методі скінченних різниць?
11. Від чого залежить точність розрахунків методом скінченних різниць?

2.5 Стійкість рам

При розрахунку рам на стійкість зазвичай виходять з таких припущень:

- навантаження прикладене тільки у вузлах рами; якщо навантаження розташоване у межах стержнів, воно розподіляється у вузли;
- усі сили змінюються пропорційно одному параметру;
- поздовжніми та поперечними деформаціями при визначенні переміщень нехтують;
- зближення кінців стержнів за рахунок викривлення осі не враховують;
- втрата стійкості відбувається в межах пружної стадії роботи матеріалу;
- зусилля у стержнях рами до самої втрати стійкості відповідають зусиллям висхідного стану;
- поперечні сили вважають діючими перпендикулярно до осі стержня у висхідному стані.

Звісно, ці припущення не дають можливості точного аналізу стійкості рами, але для практичних задач визначення критичних навантажень можуть бути застосовані.

Розрахунок рам на стійкість виконується методом сил або методом переміщень.

2.5.1 Розрахунок рам на стійкість методом переміщень

Основна система при розрахунку на стійкість обирається так само, як і при звичайному статичному розрахунку. З урахуванням наведених припущень у висхідному стані стійкої рівноваги навантаження викликає лише стискання деяких стержнів. Виходячи з цього реакції у доданих в'язях основної системи від заданого навантаження відсутні: $R_{sf} = 0$. Отже, канонічні рівняння утворюють систему однорідних алгебраїчних рівнянь відносно переміщень доданих в'язей:

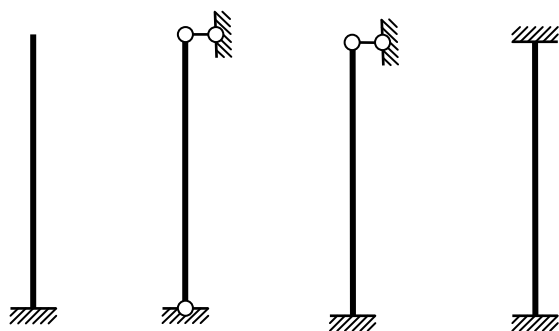


Рисунок 33

Для прикладу покажемо розрахунок стержня з одним шарнірним, а іншим затисненим кінцями (рис. 34, а).

При повороті затиснення на кут $\varphi = 1$ (рис. 34, б) при наявності поздовжньої сили N в опорах виникають реакції, співвідношення між якими неважко одержати з рівнянь рівноваги стержня: $H_A = R_B = R$; $M_A = R_B l = Rl$. Згинаючий момент у довільному перерізі становить

$$M = -N y - R x, \quad (77)$$

отже диференціальне рівняння згину стержня має такий вигляд:

$$EI y'' = -N y - R x.$$

Вводячи, як звичайно, позначення $n^2 = \frac{N}{EI}$, приводимо це рівняння до такого вигляду:

$$y'' + n^2 y = -\frac{R}{EI} n^2 x.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння дає прогини

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx - \frac{R}{N} x$$

та кути повороту перерізів

$$\theta = y' = C_1 n \cos nx - C_2 n \sin nx - \frac{R}{N}$$

у суміжному стані.

Запишемо граничні умови задачі:

1) при $x = 0$ $y = 0$; 2) при $x = l$ $y = 0$; 3) при $x = l$ $\theta = -\varphi = -1$.

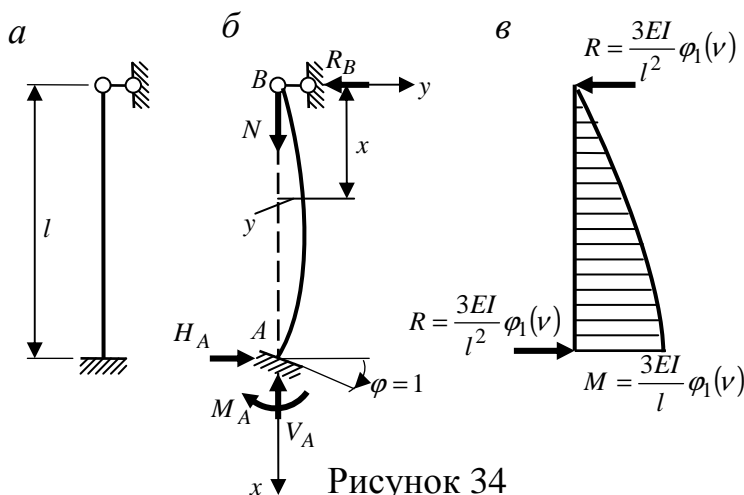


Рисунок 34

З першої умови одержимо $C_2 = 0$, з другої - $C_1 \sin nl + C_2 \cos nl = \frac{R}{N} l$, звідки $C_1 = \frac{R}{N} \frac{l}{\sin nl}$. Нарешті, третя умова дає $C_1 n \cos nl - \frac{R}{N} = -1$, звідки знаходимо:

$$R = N \frac{tg nl}{tg nl - nl} = n^2 EI \frac{tg nl}{tg nl - nl}.$$

Введемо позначення *параметра стійкості стержня*:

$$\nu = nl = l \sqrt{N / EI}. \quad (78)$$

З урахуванням цього перепишемо вираз для реакції, виділивши в ньому розмірну частину $\frac{3EI}{l^2}$, що відповідає значенню реакції у такому самому стержні при відсутності поздовжнього стиску:

$$R = \frac{3EI}{l^2} \varphi_1[\nu],$$

де $\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 tg \nu}{3(tg \nu - \nu)}$ - безрозмірна функція параметра стійкості стержня,

яка враховує дію поздовжньої сили.

Згинаючий момент у перерізі біля затиснення становить:

$$M = Rl = \frac{3EI}{l} \varphi_1(\nu).$$

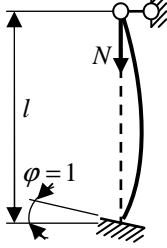
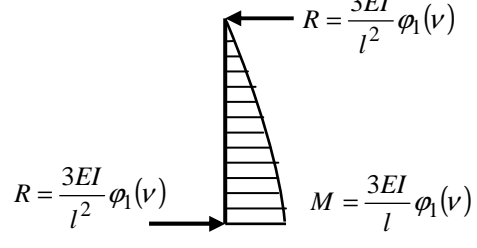
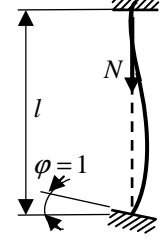
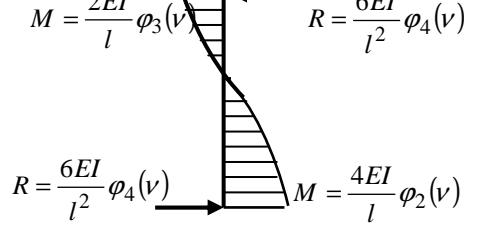
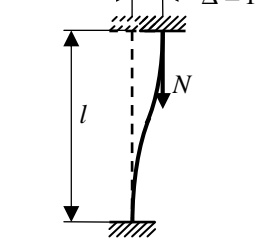
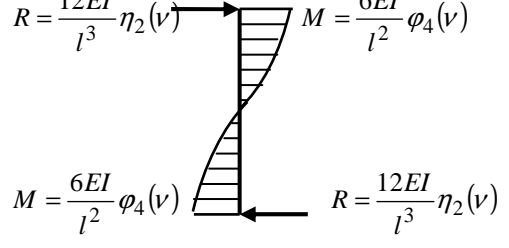
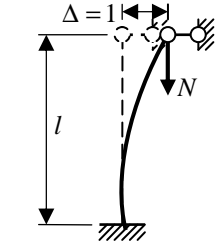
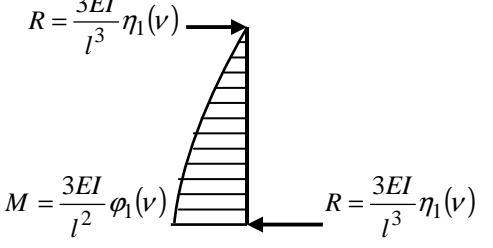
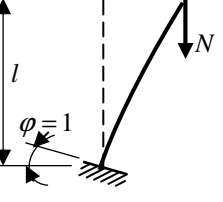
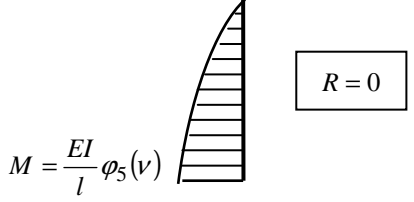
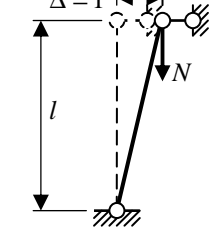
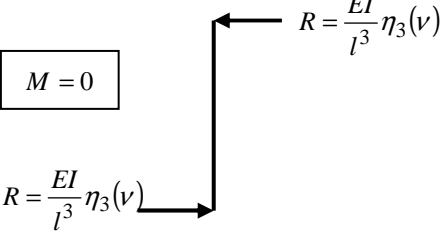
Як випливає з (77), згинаючі моменти уздовж стержня змінюються за нелінійним законом (рис. 34, в).

Аналогічно виконується розрахунок інших стержнів на поздовжній згин. Відповідні епюри згинаючих моментів, їх значення та значення реакцій наведені у таблиці. 4.

Безрозмірні функції параметрів стійкості, які входять до виразів реакцій та моментів мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\nu) &= \frac{\nu^2 tg \nu}{3(tg \nu - \nu)}; & \varphi_2(\nu) &= \frac{\nu(tg \nu - \nu)}{8tg \nu \left(tg \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; \\ \varphi_3(\nu) &= \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4 \sin \nu \left(tg \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \right)}; & \varphi_4(\nu) &= \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right); \\ \varphi_5(\nu) &= \nu tg \nu; & \eta_1(\nu) &= \frac{\nu^3}{3(tg \nu - \nu)}; \\ \eta_2(\eta) &= \eta_1(\nu/2); & \eta_3(\nu) &= \nu^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Таблиця 4

№з/п	Вид стержня та дія на нього	Епюра моментів та реакції
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Таблиця 5

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9981	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	-0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	-0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	-0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	-0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0613	0,9277	-0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	-0,7749	0,5650

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9260	-0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	-0,8465	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	-1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	-1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	-1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	-1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	-1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	-1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	-1,3480	0,4295
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8991	-1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	-1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5602	0,3802

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6383	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6929	0,3495
2,56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	-1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	-1,7838	0,3286
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0192	0,2751
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-2,1170	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	-2,1667	0,2420
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	-2,2676	0,2192
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	-2,3707	0,1968
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1850
2,86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	-2,4760	0,1734
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	-2,5296	0,1616
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
2,92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	-2,6385	0,1379
2,94	0,1878	0,6717	1,1948	0,8462	-2,6939	0,1261

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	-2,7499	0,1138
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	-2,8066	0,1016
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	-2,9219	0,0770
3,04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	-2,9805	0,0646
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	-3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	-3,0991	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	-3,2848	0,0011
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2898	0
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	-3,3480	-0,0118
3,18	-0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	-3,4120	-0,0249
3,20	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,22	-0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	-3,5425	-0,0512
3,24	-0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	-3,6092	-0,0646
3,26	-0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	-3,6767	-0,0780
3,28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7453	-0,0915
3,30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,32	-0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187
3,34	-0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	-3,9568	-0,1324
3,36	-0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	-4,0295	-0,1463
3,38	-0,2951	0,5433	1,2889	0,7918	-4,1032	-0,1602

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,42	-0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	-4,2540	-0,1884
3,44	-0,3873	0,5231	1,3045	0,7835	-4,3318	-0,2026
3,46	-0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	-4,4107	-0,2169
3,48	-0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	-4,4910	-0,2313
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,52	-0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	-4,6560	-0,2602
3,54	-0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	-4,7410	-0,2748
3,56	-0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	-4,8276	-0,2894
3,58	-0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	-4,9160	-0,3042
3,60	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,62	-0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	-5,0984	-0,3340
3,64	-0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	-5,1928	-0,3491
3,66	-0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	-5,2895	-0,3643
3,68	-0,8745	0,4345	1,3766	0,7483	-5,3886	-0,3797
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,72	-0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	-5,5947	-0,4107
3,74	-1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	-5,7020	-0,4263
3,76	-1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	-5,8124	-0,4420
3,78	-1,1034	0,3935	1,4217	0,7329	-5,9262	-0,4578

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,82	-1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	-6,1650	-0,4895
3,84	-1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056
3,86	-1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	-6,4208	-0,5217
3,88	-1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	-6,5561	-0,5379
3,90	-1,6468	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
3,92	-1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	-6,8435	-0,5706
3,94	-1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	-6,9972	-0,5871
3,96	-1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	-7,1582	-0,6037
3,98	-2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	-7,3274	-0,6204
4,00	-2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,02	-2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	-7,6942	-0,6541
4,04	-2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	-7,8952	-0,6710
4,06	-2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	-8,1087	-0,6881
4,08	-2,7888	0,2529	1,5400	0,6819	-8,3376	-0,7053
4,10	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5839	-0,7225
4,12	-3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	-8,8496	-0,7398
4,14	-3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	-9,1394	-0,7573
4,16	-3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	-9,4562	-0,7749
4,18	-3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	-0,8065	-0,7925

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,20	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,22	-4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	-10,633	-0,8281
4,24	-5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	-11,129	-0,8460
4,26	-5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	-11,701	-0,8641
4,28	-6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	-12,367	-0,8822
4,30	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,32	-7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	-14,116	-0,9188
4,34	-9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	-15,309	-0,9372
4,36	-10,503	0,0912	1,7033	0,6284	-16,840	-0,9557
4,38	-12,523	0,0781	1,7170	0,6243	-18,918	-0,9744
4,40	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-21,783	-0,9931
4,42	-19,703	0,0513	1,7452	0,6161	-26,215	-1,0119
4,44	-27,349	0,0376	1,7602	0,6119	-33,920	-1,0309
4,46	-44,158	0,0237	1,7754	0,6077	-50,779	-1,0499
4,48	-111,57	0,0096	1,7910	0,6034	-118,26	-1,0691
4,50	+226,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,52		-0,0194	1,8234	0,5948		-1,1077
4,54		-0,0343	1,8402	0,5905		-1,1271
4,56		-0,0495	1,8575	0,5861		1,1457
4,58		-0,0650	1,8752	0,5817		-1,1662
4,60		-0,0807	1,8933	0,5772		-1,1861
4,62		-0,0969	1,9119	0,5772		-1,2060
4,64		-0,1133	1,9110	0,5681		-1,2250

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,66		-0,1201	1,9507	0,5665		-1,2461
4,68		-0,1472	1,9710	0,5589		-1,2663
4,70		-0,1646	1,9919	0,5543		-1,2165
$3/2\pi$		-0,1755	2,0052	0,5514		-1,2992
4,72		-0,1824	2,0134	0,5496		-1,3069
4,74		-0,2005	2,0355	0,5449		-1,3274
4,76		-0,2190	2,0582	1,5402		-1,3480
4,78		-0,2379	2,0816	0,5354		-1,3586
4,80		-0,2572	2,1056	0,5305		-1,3896
4,82		-0,2770	2,1304	0,5255		-1,4105
4,84		-0,2973	2,1506	0,5205		-1,4316
4,86		-0,3181	2,1824	0,5155		-1,4528
4,88		-0,3394	2,2096	0,5105		-1,4743
4,90		-0,3612	2,2377	0,5054		-1,4954
4,92		-0,3834	2,2667	0,5003		-1,5169
4,94		-0,4061	2,2966	0,4951		-1,5385
4,96		-0,4293	2,3275	0,4899		-1,5602
4,98		-0,4530	2,3594	0,4846		-1,5821
5,00		-0,4772	2,3924	0,4793		-1,6040
5,02		-0,5022	2,4265	0,4739		-1,6261
5,04		-0,5280	2,4620	0,4685		-1,6483
5,06		-0,5545	2,4986	0,4630		-1,6706
5,08		-0,5818	2,5365	0,4576		-1,6929

Продовження таблиці 5

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,10		-0,6099	2,5757	0,4520		-1,7155
5,12		-0,6388	2,6164	0,4464		-1,7381
5,14		-0,5685	2,6587	0,4407		-1,7609
5,16		-0,6999	2,7027	0,4350		-1,7838
5,18		-0,7306	2,7485	0,4292		-1,8078
5,20		-0,7630	2,7961	0,4234		-1,8299
5,22		-0,7964	2,8454	0,4175		-1,8532
5,24		-0,8310	2,8968	0,4116		-1,8765
5,26		-0,8668	2,9504	0,4056		-1,9000
5,28		-0,9039	3,0064	0,3996		-1,9236
5,30		-0,9423	3,0648	0,3931		-1,9477
5,32		-0,9821	3,1257	0,3873		-1,9712
5,34		-1,0233	3,1893	0,3811		-1,9952
5,36		-1,0660	3,2559	0,3748		-2,0193
5,38		-1,1103	3,3267	0,3685		-2,0435
5,40		-1,1563	3,3989	0,3621		-2,0679
5,42		-1,2043	3,4757	0,3556		-2,0924
5,44		-1,2544	3,5563	0,3491		-2,1170
5,46		-1,3067	3,6409	0,3425		-2,1418
5,48		-1,3612	3,7298	0,3358		-2,1667
5,50		-1,4181	3,8234	0,3291		-2,1917
5,52		-1,4777	3,9222	0,3223		-2,2169
5,54		-1,5402	4,0267	0,3154		-2,2422

Продовження таблиці 5

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,56		-1,6059	4,1374	0,3085		-2,2676
5,58		-1,6751	4,2549	0,3015		-2,2932
5,60		-1,7481	4,3794	0,2944		-2,3189
5,62		-1,8252	4,5118	0,2873		-2,3447
5,64		-1,9065	4,6526	0,2801		-2,3707
5,66		-1,9920	4,8026	0,2727		-2,3969
5,68		-2,0833	4,9629	0,2654		-2,4231
5,70		-2,1804	5,1346	0,2580		-2,4495
5,72		-2,2833	5,3190	0,2505		-2,4760
5,74		-2,3944	5,5173	0,2429		-2,5027
5,76		-2,5130	5,7314	0,2352		-2,5996
5,78		-2,6406	5,9628	0,2374		-2,5466
5,80		-2,7677	6,2140	0,2195		-2,5838
5,82		-2,9262	6,4873	0,2116		-2,6111
5,84		-3,0876	6,7859	0,2036		-2,6385
5,86		-3,2634	7,1132	0,1955		-2,6661
5,88		-3,4562	7,4738	0,1873		-2,6939
5,90		-3,6678	7,8726	0,1790		-2,7218
5,92		-3,9018	8,3163	0,1706		-2,7499
5,94		-4,1603	8,8122	0,1621		-2,7782
5,96		-4,4547	9,3706	0,1535		-2,8066
5,98		-4,7816	10,004	0,1448		-2,8352

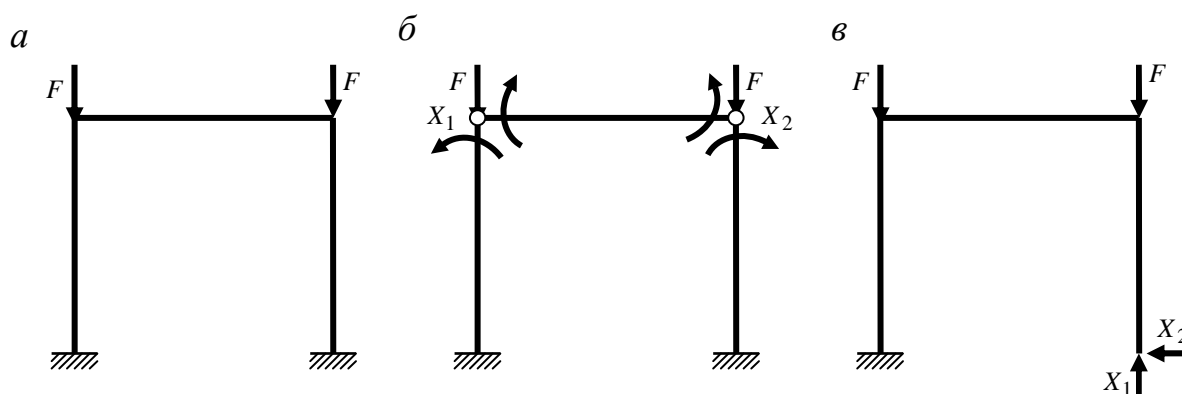
ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
6,00		-5,1589	10,727	0,1361		-2,8639
6,02		-5,5845	11,561	0,1272		-2,8928
6,04		-6,0653	12,534	0,1182		-2,9219
6,06		-6,6753	13,683	0,1091		-2,9512
6,08		-7,3699	15,060	0,0999		-2,9805
6,10		-8,2355	16,739	0,0906		-3,0102
6,12		-9,2939	18,832	0,0812		-3,0400
6,14		-10,646	21,511	0,0717		-3,0699
6,16		-12,440	25,065	0,0621		-3,0991
6,18		-14,921	29,999	0,0523		-3,1304
6,20		-18,594	37,308	0,0424		-3,1609
6,22		-24,575	49,255	0,0324		-3,1916
6,24		-36,100	72,272	0,0223		-3,2225
6,26		-67,436	135,03	0,0121		-3,2535
6,28		-492,67	984,32	0,0017		-3,2848
2π		$-\infty$	∞	0		-3,2898

Таблиця 6

ν	$\varphi_5(\nu)$	ν	$\varphi_5(\nu)$	ν	$\varphi_5(\nu)$	ν	$\varphi_5(\nu)$
0,00	0,0000	0,70	0,5896	1,00	1,5574	1,30	4,6828
0,10	0,0100	0,72	0,6315	1,02	1,6607	1,32	5,1524
0,20	0,0405	0,74	0,6757	1,04	1,7718	1,34	5,7025
0,30	0,0928	0,76	0,7223	0,06	1,89,15	1,36	6,3559
0,40	0,1691	0,78	0,7716	1,08	2,0209	1,38	7,1449
0,50	0,2732	0,80	0,8237	1,10	2,1612	1,40	8,1170
0,52	0,2977	0,82	0,8788	1,12	2,3139	1,42	9,3452
0,54	0,3237	0,84	0,9371	1,14	2,4805	1,44	10,947
0,56	0,3511	0,86	0,9989	1,16	2,6631	1,46	13,123
0,58	0,3800	0,88	1,0645	1,18	2,8642	1,48	16,255
0,60	0,4105	0,90	1,1341	1,20	3,0866	1,50	21,152
0,62	0,4426	0,92	1,2082	1,22	3,3340	1,52	29,898
0,64	0,4765	0,94	1,2871	1,24	3,6108	1,54	49,990
0,66	0,5122	0,96	1,3712	1,26	3,9227	1,56	144,49
0,68	0,5499	0,98	1,4611	1,28	4,2769	$\pi / 2$	∞

Слід мати на увазі, що функції $\varphi_1(\nu), \eta_1(\nu)$ мають розрив при $\nu = 3\pi/2 \approx 4,49$, функції $\varphi_2(\nu), \varphi_3(\nu)$ - при $\nu = 2\pi \approx 6,28$, а функція $\varphi_5(\nu)$ - при $\nu = \pi/2$.

Розрахунок рам на стійкість методом сил виконується у такій самій послідовності, як і звичайний статичний розрахунок. При виборі основної системи з'являються деякі особливості. Так, необхідно обирати таку основну систему, у якій згинаючі моменти від заданого навантаження відсутні. Наприклад, для рами, наведеної на рисунку 35, *а*, необхідно обрати основну систему, за рисунком 35, *б*, а не ту, яка зображена на рисунку 35, *в*.



Як і у методі переміщень, канонічні рівняння є однорідними – без вільних членів:

Одиничні переміщення δ_{ik} повинні визначатися з урахуванням заданого вузлового навантаження. У зв'язку з цим в основній системі повинні бути побудовані епюри моментів M_i від зайвих невідомих $X_i=1$ з урахуванням

навантаження та епюри моментів \bar{M}_i лише від дії одиничних невідомих. Епюри M_i на стиснутих стержнях криволінійні, а епюри \bar{M}_i на усіх стержнях лінійні.

При обчисленні переміщень за формулою Мора $\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i M_k dx$ перемноження епюр у межах стиснуто-зігнутих стержнів обчислюються за допомогою функцій параметрів стійкості залежно від вигляду епюр, що перемножуються. Правила цих обчислень див., наприклад у [6].

Як і у методі переміщень, критичне навантаження визначають з умови рівності нулю визначника системи канонічних рівнянь:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1k} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2k} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ik} & \cdots & \delta_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nk} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (80)$$

Метод сил у розрахунках на стійкість, як правило, менш зручний, ніж метод переміщень, через достатньо громіздке обчислення переміщень δ_{ik} .

2.5.4 урахування симетрії при розрахунку рам на стійкість

Розрахунок симетричних рам на стійкість можна суттєво спростити, якщо попередньо виділити дві можливі форми втрати стійкості: симетричну та косиметричну.

Так, для рами, наведеної на рисунку 36, а, симетричній формі втрати стійкості (рис. 36, б) відповідає відсутність горизонтальних переміщень вузлів ригеля та однаковість кутів їх повороту. Отже у цьому випадку маємо розрахунок з одним невідомим поворотом вузлів. З іншого боку, косиметричній формі втрати стійкості (рис. 36, в) відповідає наявність лінійного зміщення вузлів та однаковість їх поворотів. У цьому випадку маємо розрахунок з двома невідомими метода переміщень.

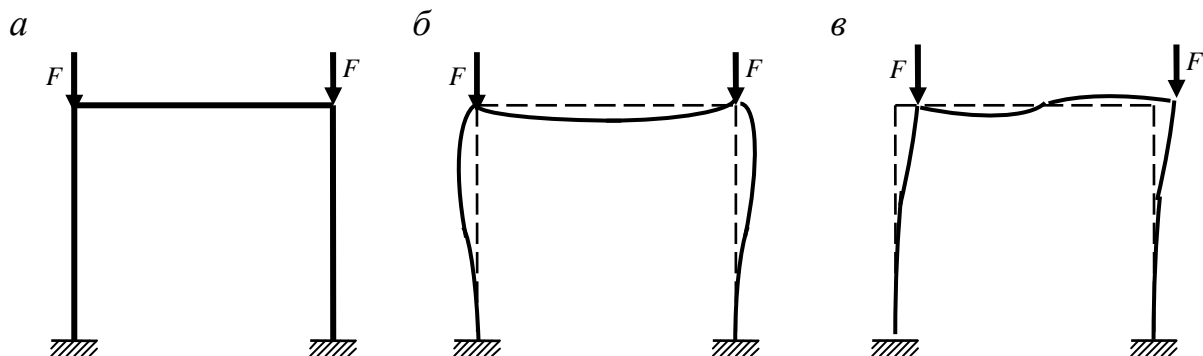


Рисунок 36

Виконуючи окремо розрахунок за кожною з цих форм втрати стійкості, критичну силу знаходимо як менше з одержаних значень:

$$F_{кр} = \min(F_{кр}^c; F_{кр}^{kc}).$$

Запитання для самоконтролю

1. Які припущення приймають при розрахунку рам на стійкість?
2. Яка особливість канонічних рівнянь у методі сил та у методі переміщень?
3. Як визначаються параметри стійкості стержнів рами?
4. Який характер мають епюри згинаючих моментів в основній системі методу переміщень на відміну від епюр при звичайному статичному розрахунку?
5. Як отримують рівняння стійкості рами?
6. Як у виразах моментів та реакцій стержнів у основній системі методу переміщень враховується наявність стискувальної сили?
7. Як визначають коефіцієнти канонічних рівнянь методу переміщень?
8. Як визначають критичну силу після визначення критичного параметру?
9. Які особливості вибору основної системи методу сил при розрахунку на стійкість?
10. Як можна спростити розрахунок на стійкість симетричних рам?

2.6 Стійкість колових арок та кілець

2.6.1 Диференціальне рівняння згину кривого бруса

Розглядаємо стійкість кілець та арок, окреслених за дугою кола, які знаходяться під дією рівномірно розподіленої вздовж дуги радіального стискувального навантаження. У висхідному стані такі арки зазнають лише стиску. Моментами, що виникають за рахунок обтискання, нехтують. При втраті стійкості арка переходить до суміжного стану, у якому додатково до стиску виникає згин. Поздовжніми деформаціями арки, як і при розрахунку рам, нехтуємо.

Зміна кривини осі арки $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}$ при переході до суміжного стану пропорційна згинаючому моменту:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = -\frac{M}{EI}. \quad (81)$$

Тут r та r_1 - радіуси кривини осі арки відповідно у вихідному та суміжному стані. Жорсткість перерізу EI будемо вважати незмінною. Згинаючий момент M вважається додатним, якщо він зменшує початкову кривину осі.

Виділимо елемент mn кривого бруса (рис. 37, а) довжиною $ds = r d\theta$ і розглянемо його поведінку при переході у суміжний стан $m'n'$.

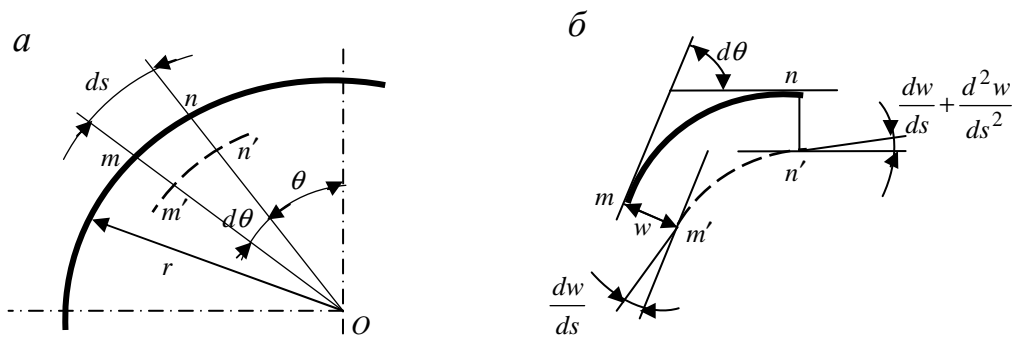


Рисунок 37

При цьому грані елемента зазнають поворотів та лінійних зміщень вздовж радіусу та вздовж дотичної (рис. 37, б). Переміщення вздовж дотичної не спричиняють згину, тому їх не враховуємо. Радіальне переміщення w вважаємо додатним, якщо воно спрямовано до центра кривини.

Внаслідок деформації переріз у т. m' повернеться на кут $\frac{dw}{ds}$, а у т. n' - на кут $\frac{dw}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}\right)ds = \frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2}ds$. Отже, кут між цими перерізами зміниться на величину $\frac{d^2w}{ds^2}ds$.

Початкова кривина осі становить

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (82)$$

а після втрати стійкості

$$\frac{1}{r_1} = \left(d\theta + \frac{d^2w}{ds^2} \right) / ds_1, \quad (83)$$

де ds_1 - довжина осі елемента у суміжному стані.

Оскільки деформації малі, сектори mOn та $m'On'$ на рисунку 37, а можна вважати подібними. Отже маємо: $\frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{r-w}$, звідси $ds_1 = \left(1 - \frac{w}{r}\right) ds$.

Підставляючи ds_1 у (83), одержимо:

$$\frac{1}{r_1} = \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) / \left(1 - \frac{w}{r} \right). \quad (84)$$

З урахуванням (82) та (84) зміна кривини осі елемента буде такою:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) / \left(1 - \frac{w}{r} \right) - \frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{r^2} \right) \frac{r}{r-w}.$$

Нехтуючи у знаменнику величиною переміщення w порівняно з радіусом r , одержимо:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{r^2}. \quad (85)$$

Підставляючи (85) у (81), одержимо диференціальне рівняння згину кривого бруса, окресленого за дугою кола:

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{r^2} = \frac{M}{EI}$$

або, переходячи до полярних координат

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}; \quad \frac{d^2w}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} \right) = \frac{d^2w}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d^2w}{d\theta^2},$$

одержимо співвідношення

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{M r^2}{EI}, \quad (86)$$

що є диференціальним рівнянням згину кривого бруса при втраті стійкості.

2.6.2 Стійкість двохарнірної арки

У висхідному стані при дії рівномірно розподіленого навантаження q перерізи арки зазнають осьового стиску силою $N = qr$. Як показують дослідження, втрата стійкості відбувається за кососиметричною формою (штрихова лінія на рис. 38). При цьому у перерізах арки виникають згинаючі моменти $M = N w = q r w$.

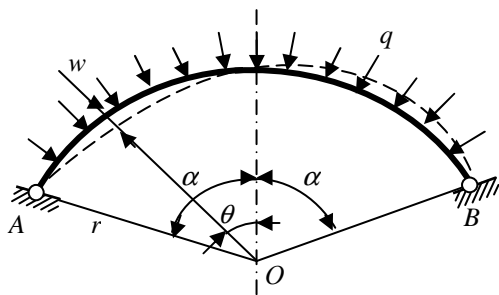


Рисунок 38

З урахуванням цього диференціальне рівняння (86) набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = 0, \quad (87)$$

$$\text{де } n^2 = 1 + \frac{q r^3}{EI}. \quad (88)$$

Записуючи розв'язок цього

рівняння: $w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta$, використаємо граничні умови:

при $\theta = 0$ $w = 0$, при $\theta = \alpha$ $w = 0$.

З першої умови одержимо $C_1 = 0$, а друга приводить до співвідношення

$$C_2 \sin n\alpha = 0.$$

Маючи на увазі, що $C_2 \neq 0$, одержимо нескінченну кількість розв'язків: $\sin n\alpha = 0$, тобто $n\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$. Відкидаючи нульовий розв'язок, який відповідає висхідній формі рівноваги, беремо найменший корінь - $n\alpha = \pi$.

Тепер з (88) одержимо:

$$\frac{\pi^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{q r^3}{EI},$$

звідки знаходимо критичне навантаження:

$$q_{kp} = \frac{EI}{r^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (89)$$

Зокрема для арки, окресленої за напівколом ($\alpha = \pi/2$), маємо:

$$q_{kp} = 3EI / r^3. \quad (90)$$

2.6.3 Стійкість безшарнірної арки

Безшарнірна арка (рис. 39, а), як і двошарнірна, втрачає стійкість за кососиметричною формою. На відміну від двошарнірної, у опорних перерізах безшарнірної арки виникають моменти M_0 . Тоді безшарнірну арку можна розглядати як двошарнірну, завантаженою додатково до розподіленого навантаження ще й моментами M_0 на опорах (рис. 39, б). Епюра згинаючих моментів від цих опорних моментів наведена на рисунку 39, в.

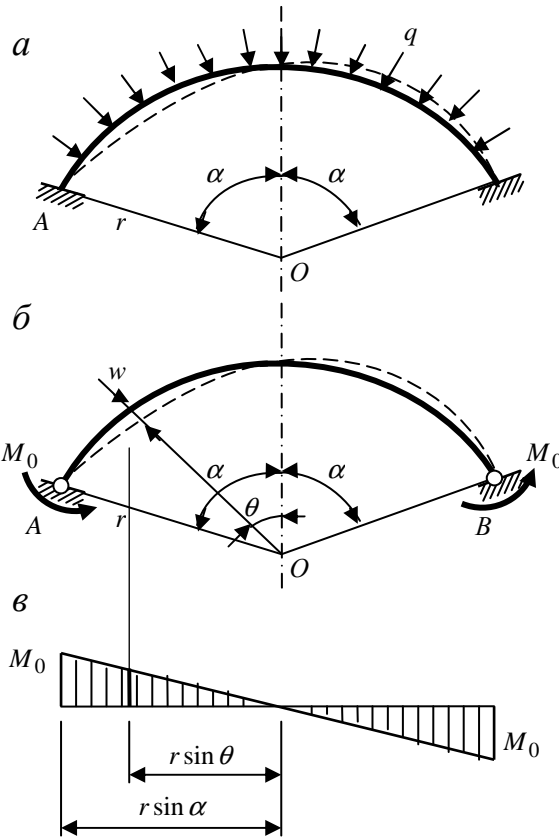


Рисунок 39

Отже додатково до моменту від навантаження q у перерізі суміжного стану на відстані $r \sin \theta$ від осі симетрії діє згинаючий момент $M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$, а повний згинаючий момент буде таким:

$$M = qrw - M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}.$$

Тепер диференціальне рівняння (86) набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = C \sin \theta. \quad (91)$$

$$\text{де } n^2 = 1 + \frac{qr^3}{EI}; C = \frac{M_0 r^2}{EI \sin \alpha}.$$

Розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta + \frac{C \sin \theta}{n^2 - 1}.$$

Для визначення коефіцієнтів C_1, C_2, C запишемо граничні умови:

при $\theta = 0$ $w = 0$; для $\theta = \alpha$ $w = 0$; при $\theta = \alpha$ $\frac{dw}{d\theta} = 0$.

З першої умови одержимо $C_1 = 0$, а з другого та третього випливає:

$$C_2 \sin n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \sin \alpha = 0;$$

$$C_2 n \cos n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \cos \alpha = 0.$$

Оскільки $C_2 \neq 0, C \neq 0$, прирівнюємо до нуля визначник одержаних рівнянь:

$$\begin{vmatrix} \sin n\alpha & \frac{\sin \alpha}{n^2 - 1} \\ n \cos n\alpha & \frac{\cos \alpha}{n^2 - 1} \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, з урахуванням $n^2 \neq 1$, приходимо до рівняння:

$$n \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} n\alpha = 1. \quad (92)$$

Розв'язання цього рівняння стійкості дає значення параметру n і, далі, за (88) критичне навантаження q_{kp} .

Наприклад, для арки з $\alpha = 1$ рад. $n \approx 4,56$. Тоді $4,56^2 = \frac{q r^3}{EI}$ і $q_{kp} = 19,9 \frac{EI}{r^3}$.

2.6.4 Стійкість тришарнірної арки

Для тришарнірної арки (рис. 40) необхідно розглядати як симетричну, так і косиметричну форми втрати стійкості.

При косиметричній втраті стійкості згин здійснюється так само, як у двошарнірній арці. Тому відповідне критичне навантаження може бути обчислено за формулою (89).

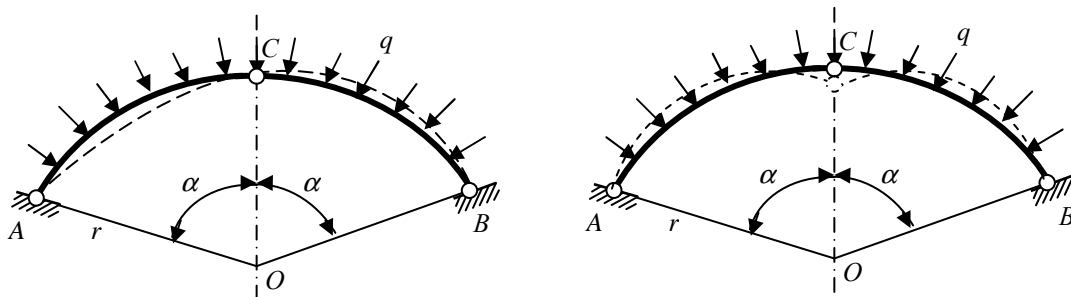


Рисунок 40

При симетричній формі втрати стійкості рівняння стійкості набуває такого вигляду:

$$4\eta_1(u) = \eta_1(\alpha). \quad (93)$$

Тут $\eta_1(u) = \frac{u^3}{3tg(u) - u}$ - функція, що використовується у розрахунках рам на стійкість. Її значення наведені у таблиці 5.

Після визначення кореня u рівняння (93) критичне навантаження для симетричної форми втрати стійкості обчислюється за формулою

$$q_{kp} = \frac{EI}{r^3} \frac{4u^2 - \alpha^2}{\alpha^2}. \quad (94)$$

Остаточне критичне навантаження для тришарнірної арки є меншим з обчислених за (89) та (94).

2.6.5 Стійкість колових кілець

Колове кільце при дії стискаючого радіального рівномірного навантаження втрачаючи стійкість набуває форму, близьку до овальної. Враховуючи симетрію, розглянемо півкільце (рис. 41). При втраті стійкості у довільному перерізі K кільця з'являється згинаючий момент

$$M = M_0 - N(w_0 - w) = M_0 - qr(w_0 - w).$$

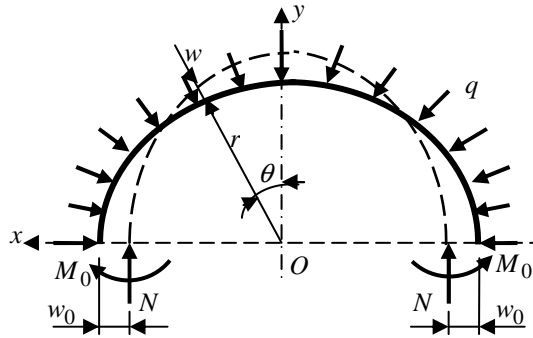


Рисунок 41

У цьому випадку диференціальне рівняння (86) набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{r^2}{EI}(M_0 - qr w_0 + qtw)$$

або

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = D, \quad (95)$$

де: n - позначення за (86);

$$D = \frac{r^2}{EI}(M_0 - qr w_0). \quad (96)$$

Розв'язок рівняння (95) має такий вигляд:

$$w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta + D/n^2, \quad (97)$$

а перша похідна прогину:

$$\frac{dw}{d\theta} = -C_1 n \sin n\theta + C_2 n \cos n\theta. \quad (98)$$

Запишемо граничні умови: при $\theta = 0$ $\frac{dw}{d\theta} = 0$, при $\theta = \pi/2$ $\frac{dw}{d\theta} = 0$.

З першої умови знаходимо $C_2 = 0$, з другої - $C_1 n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$, звідки при умові, що $C_1 \neq 0$, одержимо:

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0, \text{ тобто } \frac{n\pi}{2} = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

Значення критичного навантаження відповідає першому ненульовому кореню, тобто $n = 2$.

Тепер за (86) знаходимо критичне навантаження:

$$q_{kp} = 3EI / r^3.$$

Запитання для самоконтролю

1. Який напружений стан має місце у кільцях та, арках окреслених за дуг ою кола під дією радіального стискуючого навантаження?
2. Який вигляд має диференціальне рівняння згину кривого бруса?
3. За якою формою втрачає стійкість двошарнірна арка? Безшарнірна? Тришарнірна? Колове кільце?

2.7 Поняття про стійкість плоскої форми згину

При плоскому згині раціональними за міцністю є такі перерізи, площі яких віддалені від нейтральної осі, зокрема двотаври. У цих перерізах велика різниця між головними моментами інерції зумовлює можливість викривлення стиснутої зони з площини згину. Таке викривлення називають *втратою стійкості плоскої форми згину*. Викривлення стиснутої зони супроводжується викривленням поздовжньої осі балки у площині меншої жорсткості та поворотом перерізів навколо цієї осі. Разом з висхідною деформацією – плоским згином з'являється нова – згин у площині меншої жорсткості та кручення.

При дослідженні стійкості плоскої форми згину вважають дійсною гіпотезу про недеформованість контуру поперечного перерізу.

Особливості розрахунку на стійкість плоскої форми згину покажемо на прикладі консольної балки, завантаженої на кінці зосередженою силою (рис. 42).

Така балка у вигляді тонкої полоси при втраті стійкості викривляється зі своєї площини при одночасному закручуванні. При цьому у перерізах балки, окрім згинаючого моменту у вертикальній площині $M_z = -F x$, виникає згинаючий момент у горизонтальній площині $M_y = F x \theta$ та крутний момент $M_x = -F x \frac{du}{dx} - F(\delta - u)$.

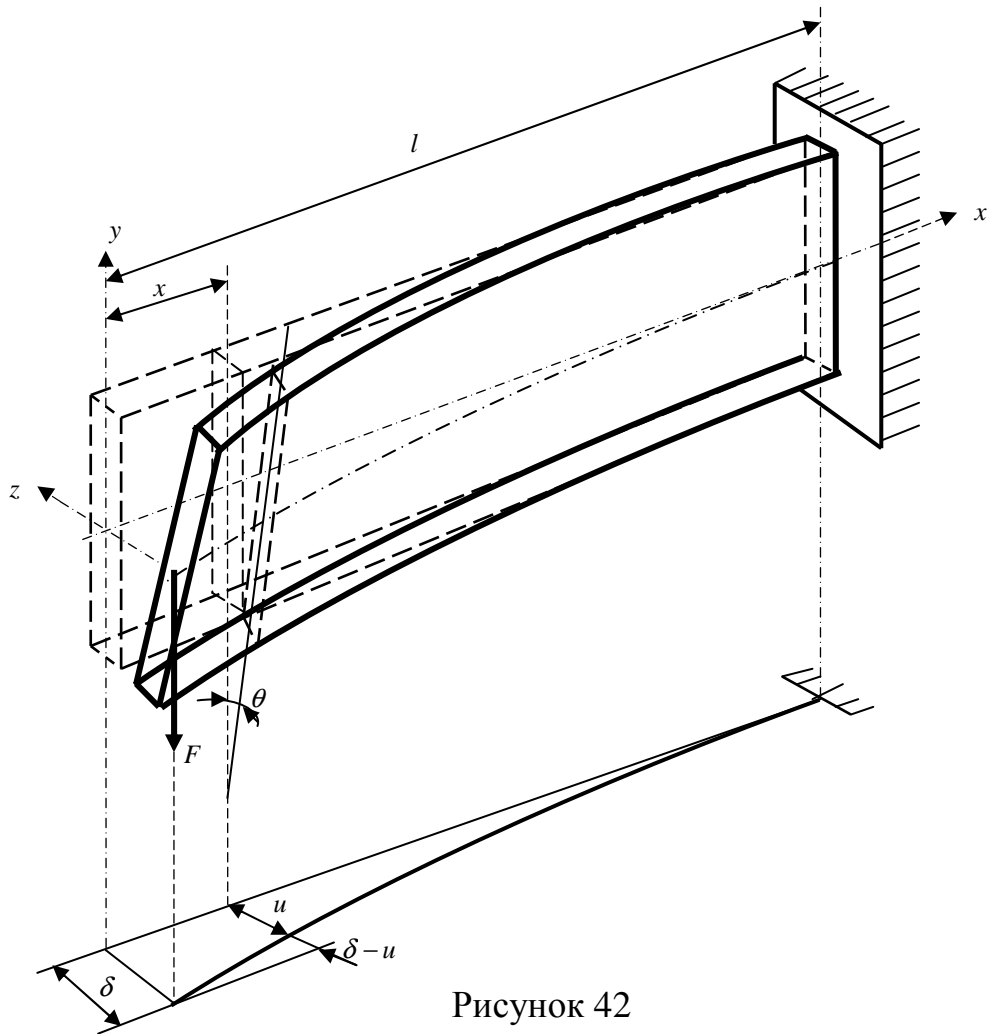


Рисунок 42

Диференціальні рівняння згину у горизонтальній площині та кручення мають такий вигляд:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dx^2} = F x \theta; \quad GI_k \frac{d\theta}{dx} = -F x \frac{du}{dx} - F(\delta - u). \quad (99)$$

Перетворимо друге рівняння так: $x \frac{du}{dx} = u - \delta - \frac{GI_k}{F} \frac{d\theta}{dx}$ та диференціюємо

його за x : $\frac{du}{dx} + x \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{du}{dx} - \frac{GI_k}{F} \frac{d^2 \theta}{dx^2}$.

Звідси одержимо: $\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{GI_k}{Fx} \frac{d^2 \theta}{dx^2}$.

З урахуванням цього перше диференціальне рівняння (99) набуває такого вигляду:

$$\frac{EI_y GI_k}{Fx} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + F x \theta = 0.$$

Переходячи до відносної абсциси положення перерізу $\alpha = x/l$ і поділивши рівняння на множник при другій похідній кута закручення, введемо позначення:

$$n^2 = \frac{F^2 l^2}{EI_y G I_k}. \quad (100)$$

З урахуванням цих перетворень приходимо до такого диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 \theta}{d\alpha^2} + n^2 \alpha^2 \theta = 0. \quad (101)$$

Загальний інтеграл цього рівняння можна подати у вигляді нескінченних рядів:

$$\begin{aligned} \theta = & C_1 \left(1 - \frac{n^2}{3 \cdot 4} \alpha^4 + \frac{n^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} \alpha^6 - \frac{n^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \alpha^{12} + \dots \right) + \\ & + C_2 \left(\alpha - \frac{n^2}{4 \cdot 5} \alpha^5 + \frac{n^4}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} \alpha^9 - \frac{n^6}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} \alpha^{13} + \dots \right). \end{aligned}$$

У цій задачі маємо такі граничні умови: при $\alpha = 0 \frac{d\theta}{d\alpha} = 0$, при $\alpha = 1 \theta = 0$.

З першої умови знаходимо $C_2 = 0$, друге дає:

$$C_1 \left(1 - \frac{n^2}{3 \cdot 4} + \frac{n^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{n^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots \right) = 0.$$

З урахуванням $C_1 \neq 0$ вводимо зміну $n^2 = a$. У такому разі одержуємо таке характеристичне рівняння:

$$1 - \frac{a}{3 \cdot 4} + \frac{a^2}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{a^3}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots = 0.$$

При утриманні п'ятих членів ряду корінь цього рівняння буде $a = n^2 = 16,1$. З позначення (100) одержимо таке значення критичної сили:

$$F_{kp} = \frac{4,01}{l^2} \sqrt{EI_y G I_k}. \quad (102)$$

3 Динаміка стержневих систем

3.1 Основні поняття

Динаміка споруд займається дослідженням поведінки споруд при динамічних впливах та розробкою методів їх розрахунку на ці впливи.

У реальній споруді динамічні навантаження діють разом зі статичними. Однак на підставі принципу суперпозиції, що діє для лінійно деформованих систем, урахування статичних навантажень може бути виконано окремо. У зв'язку з цим тут розглядається розрахунок тільки на динамічні впливи при відсутності статичних навантажень.

При використанні принципу Даламбера сила інерції розглядається як зовнішнє навантаження, що прикладене до мас.

3.1.1 Динамічні впливи

Динамічні впливи можуть бути силовими та кінематичними і приводять до збудження коливань мас споруди. Динамічні впливи являють собою змінні за величиною чи спрямуванням навантаження – *збуджуючі навантаження*

Нерухомі періодичні навантаження – це навантаження, що змінюють безперервно періодично за часом свою величину та напрямок. Вони виникають в основному при наявності неврівноважених частин механічного обладнання. Так, при рівномірному обертанні ротора, центр мас m якого розташований з ексцентриситетом ρ (рис. 43), виникає відцентрова сила $F = m\rho\theta^2$ (θ – кутова швидкість обертання).

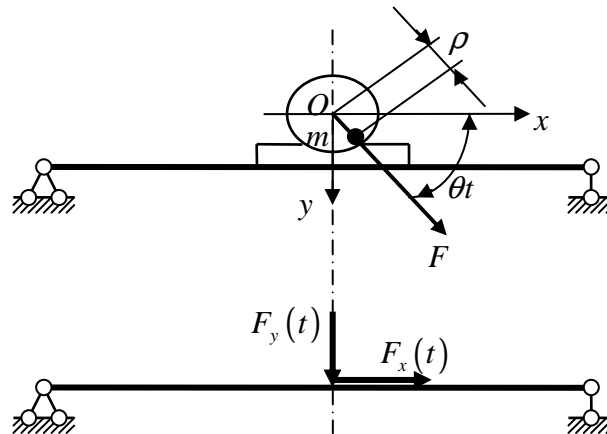


Рисунок 43

Складові цієї сили $F_y(t) = F \sin \theta t$, $F_x(t) = F \cos \theta t$ є гармонічними – змінюються за законом синуса.

Інший вид періодичного навантаження – навантаження, пов'язані з роботою машин з кривошипно-шатунними механізмами. Графік змінення такого навантаження наведений на рисунку 44.

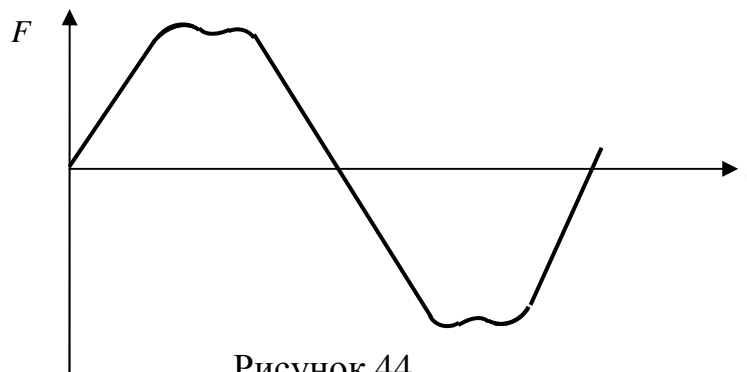


Рисунок 44

Імпульсні навантаження викликаються одно – або багаторазовою дією у фіксованому місці (падіння тіла, удар льодин, ударна хвиля вибуху та ін.).

Рухоме навантаження змінює своє розташування на споруді. При цьому з'являються і періодичні впливи за рахунок нерівностей проїжджої частини, і ударні (потяг на стиках рейок).

Сейсмічний вплив є кінематичним і визначається зсувами основи в результаті землетрусу. Закон такого впливу складний і пов'язаний зі зміною прискорень основи (рис. 45). Тут \ddot{v} - прискорення основи.

Вітрове навантаження викликається поривами вітру, які повторюються з часом. Таке навантаження може учинити значні впливи на висотні та багатопрогонні споруди.

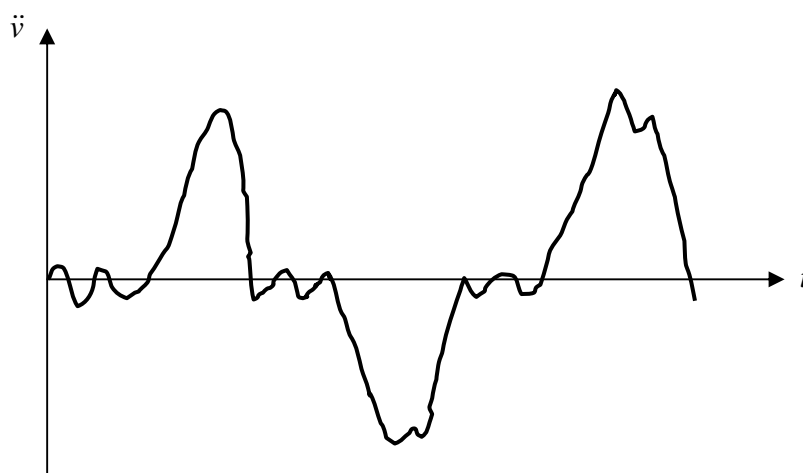


Рисунок 45

3.1.2 Сили, що супроводжують коливання

При коливанні споруди з'являються сили, які зазвичай враховують в динамічних розрахунках.

Сили інерції за Даламбером пропорційні масі тіла та другій похідній переміщення – прискоренню. Зазвичай сила інерції спрямовується у бік переміщення і береться зі знаком мінус:

$$I = -m \frac{d^2 v}{dt^2} = -m \ddot{v}. \quad (103)$$

Точки над змінною, як зазвичай, означають похідну за часом.

Відновлювальні сили прагнуть повернути тіло у висхідне положення при його відхиленні від положення рівноваги. Ці сили зазвичай пропорційні переміщенню.

$$F_c = c \cdot v \quad (104)$$

і спрямовані у бік, зворотній переміщенню.

Тут c – жорсткість споруди – сила, що виникає при одиничному переміщенні маси.

Жорсткість – є величина, зворотна піддатливості споруди:

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (105)$$

де δ_{11} – переміщення маси, яке викликається дією одиничної сили – піддатливість.

Дисипативні сили опору виникають через наявність внутрішнього тертя, тертя у шарнірах, опору середовища. Сили тертя є постійними, а сили опору середовища пропорційні швидкості:

$$F_d = k \cdot \dot{v}. \quad (106)$$

Тут k – коефіцієнт опору – сила, яка діє при швидкості $\dot{v} = 1$.

Дисипативні сили спрямовані у бік, зворотний переміщенню (швидкості).

3.1.3 Методи динаміки споруд

Для розрахунку на динамічні впливи застосовують три метода: статичний, енергетичний и кінематичний.

Статичний метод ґрунтується на використанні принципу Даламбера. У відповідності до цього принципу, якщо в системі крім заданого навантаження прикласти усі сили, які супроводжують коливання, до неї можна застосувати умови рівноваги. Цей метод широко застосовується у простих задачах динаміки.

Енергетичний метод ґрунтується на принципі збереження енергії:

$$T + U = const,$$

де T – кінетична енергія, U – потенціальна енергія системи.

Принцип стаціонарності приводить до рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial v} = 0,$$

де v – узагальнена координата (узагальнене переміщення), яка визначає положення маси у процесі коливань.

Кінематичний метод ґрунтується на використанні принципу можливих переміщень та принципу Даламбера. Він застосовується, як і при статичному розрахунку, з урахуванням усіх сил, що супроводжують коливання.

3.1.4 Ступені вільності динамічної системи

У кінематичному аналізі споруд і у розрахунках на стійкість ступені вільності визначаються виходячи з можливості переміщень усіх точок системи. У динаміці число ступенів вільності вважають кількістю незалежних переміщень мас системи. Так, стержень з *розподіленою масою* (рис. 46, а) має $W = \infty$, оскільки кожна його точка має масу, а кількість цих точок нескінченна.

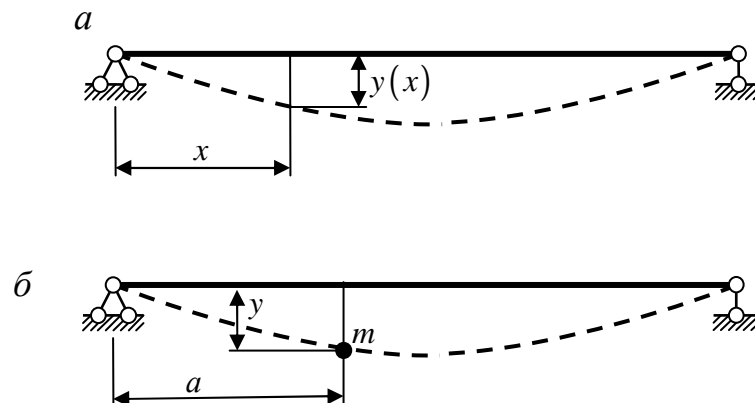


Рисунок 46

Якщо масою стержня порівняно з масою m , зосередженою в одній точці, можна знехтувати і не враховувати поздовжні деформації (рис. 46, б), положення маси m буде визначатися лише її вертикальним переміщенням y . Отже у такому разі $W = 1$.

У загальному випадку система з однією такою – *точковою масою* на площині (рис. 47, а) має два ступеня вільності.

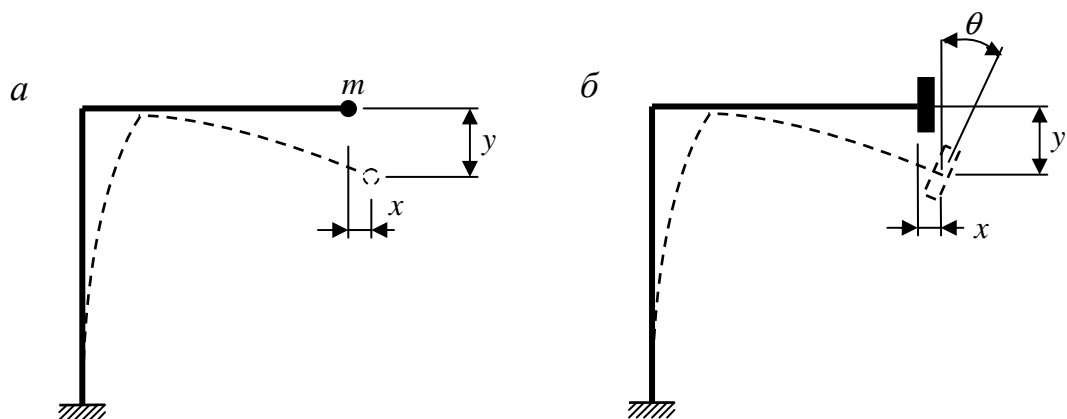


Рисунок 47

Якщо поворотами маси неможна нехтувати, система з однією такою *зосередженою масою* (рис. 47, б) у загальному випадку має три ступеня вільності: два лінійних зміщення та поворот.

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть види динамічних впливів.
2. Яке навантаження називається гармонічним?
3. Які сили з'являються при коливаннях? Наведіть їх вирази через узагальнені переміщення.
4. Які методи застосовують при розрахунку на динамічні впливи? На чому ґрунтується кожен з цих методів?
5. Що розуміють під числом ступенів вільності в динаміці? Наведіть приклади визначення W .

3.2 Вільні коливання систем з одним ступенем вільності

3.2.1 Диференціальне рівняння руху

Розглянемо невагому балку з однією точковою масою m (рис. 48, а). До балки прикладена збуджуюча сила $F(t)$ і діє сила ваги mg (g – прискорення вільного падіння). Сила ваги постійна, розрахунок на її дію не викликає складності, тому далі будемо розглядати лише дію збуджуючого навантаження.

У довільному стані переміщення маси від висхідного положення рівноваги становить v . При цьому на масу діють: сила інерції I , сила пружного опору балки F_c і сила опору середовища F_d (рис. 48, б).

Використовуючи принцип Даламбера, запишемо умову рівноваги:

$$\Sigma y = 0; \quad F(t) + I - F_c - F_d = 0.$$

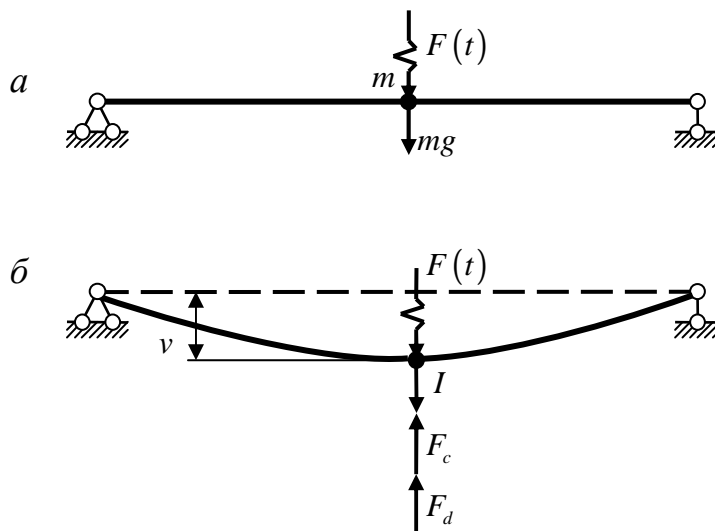


Рисунок 48

Виражаючи сили через переміщення за допомогою (103), (104), (106), перетворимо це рівняння:

$$m\ddot{v} + cv + k\dot{v} = F(t).$$

В одержаному рівнянні виокремимо другу похідну переміщення діленням усіх доданків на m :

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v + \frac{k}{m}\dot{v} = \frac{F(t)}{m}. \quad (107)$$

Диференціальне рівняння (107) руху системи з одним ступенем вільності одержано для випадку, коли усі сили, що супроводжують коливання, прикладені безпосередньо до маси. В інших випадках рівняння можуть відрізнятися лише постійними коефіцієнтами та позначенням переміщення. Для загальності міркувань далі будемо користуватися поняттям *узагальненого переміщення*, або *узагальненої координати*, яку позначаємо v .

3.2.2 Вільні коливання без опору

Розглянемо консервативну систему (нагадаємо, для неї $F_d = 0$). Відхилимо систему з положення рівноваги і відпустимо. Тоді при її коливаннях $F(t) = 0$. Такі коливання, що відбуваються при відсутності збуджуючого навантаження, називаються *вільними* або *власними коливаннями*.

Рівняння руху (107) для вільних коливань набуває такого вигляду:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v = 0.$$

Вводячи позначення

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (108)$$

приходимо до стандартного лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (109)$$

Розв'язок цього рівняння

$$v = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

перетворимо, вводячи замість A_1 і A_2 нові сталі A та λ так, що

$$A_1 = A \sin \lambda, \quad A_2 = A \cos \lambda.$$

Тоді одержимо

$$v = A \cos \omega t \sin \lambda + A \sin \omega t \cos \lambda$$

або

$$v = A \sin(\omega t + \lambda). \quad (110)$$

Отже, коливання маси відбувається за синусоїдою (рис. 49) і називаються *гармонічним*. Найбільше переміщення $v = A$ називається *амплітудою* коливань, а величина λ , що визначає положення маси в момент початку коливань, – *початковою фазою* коливань.

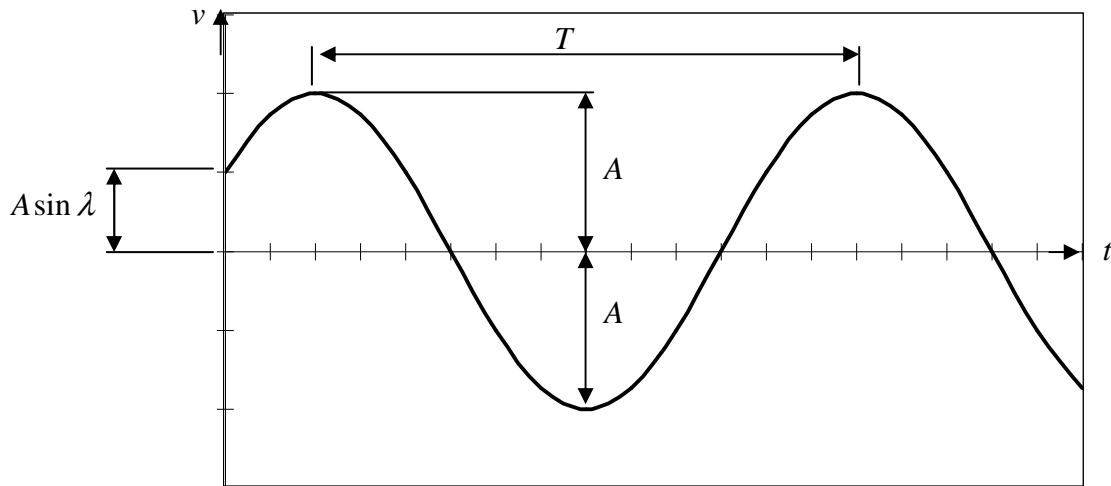


Рисунок 49

Розглянемо початкові умови. При $t = 0$ $v = v_0$ и $\dot{v} = \dot{v}_0$.

З урахуванням (110) одержуємо

$$\begin{aligned} v_0 &= A \sin \lambda, \\ \dot{v}_0 &= A \omega \cos \lambda. \end{aligned} \quad (111)$$

Поділивши перше рівняння (111) на друге, знайдемо початкову фазу коливань:

$$\lambda = \arctg \frac{\omega v_0}{\dot{v}_0}. \quad (112)$$

Далі, поділивши попередньо доданки другого рівняння (111) на ω , зведемо в квадрат обидві частини першого та другого рівнянь та підсумуємо їх:

$$v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega} \right)^2 = A^2 \sin^2 \lambda + A^2 \cos^2 \lambda.$$

Звідси знаходимо амплітуду коливань:

$$A = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega} \right)^2}. \quad (113)$$

Період коливань T – це час, за який здійснюється один повний цикл коливань. При зміні часу на величину T значення $\sin(\omega t + \lambda)$ повторюється, тобто $\omega t + \lambda + 2\pi = \omega(t + T) + \lambda$.

Звідси знаходимо

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (114)$$

та

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (115)$$

Отже, ω являє собою кількість циклів коливань, які здійснюються за 2π секунд, і називається *коловою частотою вільних коливань*. Колова частота вимірюється в рад/с або с^{-1} . У техніці часто застосовують іншу величину:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}, \quad (116)$$

яку називають *технічною частотою*. Вона являє собою число циклів коливань, що відбуваються в секунду, та вимірюється у герцах (Гц).

За позначенням (108) з урахуванням (105) знаходимо

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (117)$$

Замінімо масу через силу ваги G :

$$m = \frac{G}{g}.$$

Враховуючи, що добуток сили G на одиничне переміщення

$$G\delta_{11} = v_{\text{ст}}$$

являє собою переміщення, викликане статичною дією маси – статичне переміщення, одержуємо

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}}}}. \quad (118)$$

Аналізуючи (118), приходимо до таких висновків:

- частота ω і період T вільних коливань не залежать від початкових умов, тому ω називають також *власною частотою*;
- частота зменшується при зростанні маси і при зменшенні жорсткості системи.

Диференціюючи вираз (109) за часом, знаходимо швидкість

$$\dot{v} = A\omega \cos(\omega t + \lambda). \quad (119)$$

Звідси випливає, що швидкість також змінюється за гармонічним законом, але опереджає зміну переміщення на величину $\pi/2$, тобто на чверть періоду.

Диференціюючи (119) ще раз, одержимо прискорення

$$\ddot{v} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \lambda). \quad (120)$$

Отже, прискорення також змінюється за гармонічним законом у протифазі зі зміщенням

3.2.3 Вільні коливання з опором

В реальних умовах коливання завжди відбуваються при наявності сил опору F_d . Будемо вважати, що ці сили пропорційні швидкості \dot{v} (104).

Тоді рівняння вільних коливань системи з одним ступенем вільності набуває такого вигляду:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v + \frac{k}{m}\dot{v} = 0. \quad (121)$$

Вводячи позначення $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, а також $n = \frac{k}{2m}$,

приходимо до рівняння

$$\ddot{v} + 2n\dot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (122)$$

На практиці, як правило, має місце співвідношення $n < \omega$. У цьому випадку розв'язок рівняння(122) має вид

$$v = e^{-nt} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t). \quad (123)$$

Тут
$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (124)$$

Вираз (123) можна записати в іншій формі:

$$v = Ae^{-nt} \sin(\omega_1 t + \lambda), \quad (125)$$

де A и λ виражаються через A_1 и A_2 так:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \lambda = \arctg \frac{A_1}{A_2}.$$

Графік коливань (125) наведений на рисунку 50. Штрихові лінії показують закон зміни амплітуд коливань $v = \pm Ae^{-nt}$.

Як видно з рисунку 50 та залежності (125), коливання є згасаючими, тобто їх амплітуда з часом спрямовуються до нуля. Амплітудні значення переміщень досягаються при цьому через рівні проміжки часу T_1 . Тому такі

коливання називають умовно періодичними, приймаючи період $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Число коливань, які здійснюються за 2π секунд $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, як і при гармонічних коливаннях, називають коловою частотою згасаючих коливань.

Знайдемо відношення двох послідовно досягнутих амплітуд A_i і A_{i+1} , які відповідають моментам часу t_i і t_{i+1} :

$$\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-nt_i} \sin(\omega_1 t_i + \lambda)}{Ae^{-nt_{i+1}} \sin(\omega_1 t_{i+1} + \lambda)} = e^{nT_1}. \quad (126)$$

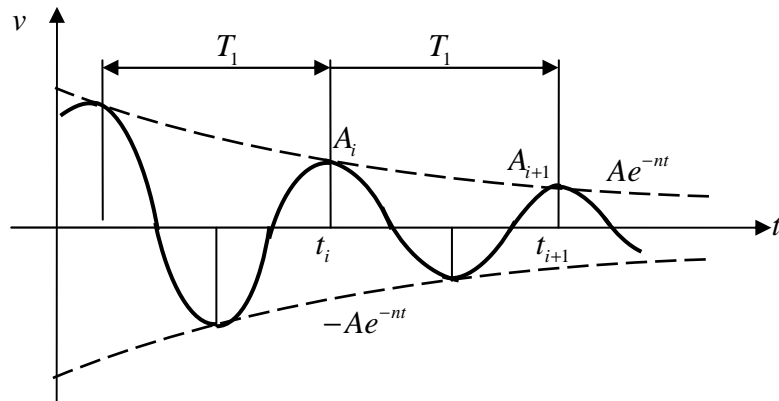


Рисунок 50

Це співвідношення характеризує швидкість згасання коливань і називається *декрементом згасання*. На практиці частіше застосовують натуральний логарифм відношення амплітуд

$$\delta = \ln\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) = nT_1 = \frac{2\pi n}{\omega_1}, \quad (127)$$

який називається *логарифмічним декрементом коливань*.

Як випливає з (124) та (127), навіть значний опір мало впливає на частоту коливань. Наприклад, при $\delta = 2,06$ амплітуда за один цикл зменшується у 7,85 разів, а частота ω_1 менше власної частоти ω лише на 5%. У зв'язку з цим в практичних розрахунках з опором зазвичай приймають $\omega_1 \approx \omega$.

Запитання для самоконтролю

11. Як одержують диференціальне рівняння руху?

12. Що таке вільні або власні коливання?
13. Чому вільні коливання без опору називають гармонічними?
14. Що таке амплітуда та початкова фаза коливань?
15. Що називається періодом коливань?
16. Що таке колова частота вільних коливань або власна частота?
17. Що таке технічна частота?
18. Як залежить власна частота від маси та жорсткості системи?
19. Чому вільні коливання з опором називають умовно періодичними?
20. Що таке декремент коливань? Логарифмічний декремент?
21. Як впливає урахування сил опору на зміну власної частоти?

3.3 Власні коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності

Розглянемо систему з двома ступенями вільності (рис. 51, *a*) при відсутності дисипативних сил опору і збуджуючого навантаження. Сили інерції, які супроводжують ці – вільні коливання системи, «викликають» переміщення мас.

Для визначення переміщень скористаємося принципом суперпозиції (рис. 51, *б*):

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{11} + v_{12}, \\ v_2 &= v_{21} + v_{22}. \end{aligned} \quad (128)$$

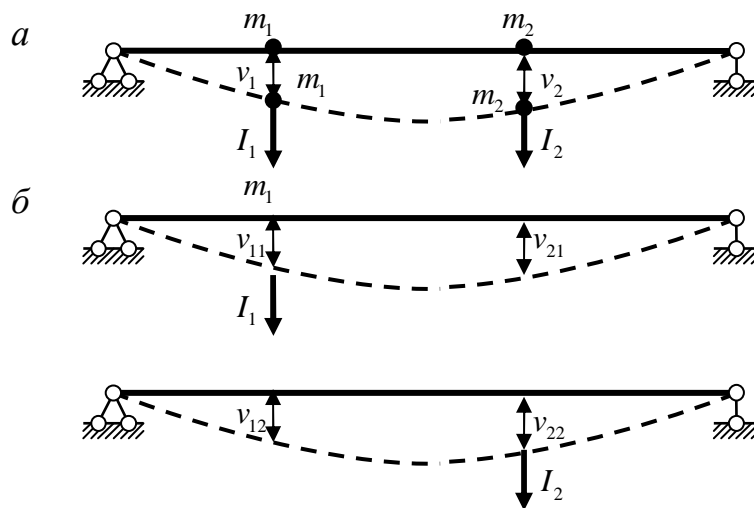


Рисунок 51

Виразивши складові переміщень через переміщення від одиничних сил

$$\begin{aligned} v_{11} &= \delta_{11} \cdot I_1, & v_{12} &= \delta_{12} I_2, \\ v_{21} &= \delta_{21} \cdot I_1, & v_{22} &= \delta_{22} I_2, \end{aligned}$$

та враховуючи вираз (103) для сили інерції, одержимо

$$\begin{aligned} v_1 &= -\delta_{11}m_1\ddot{v}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{v}_2, \\ v_2 &= -\delta_{21}m_1\ddot{v}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{v}_2. \end{aligned}$$

У загальному випадку для системи з n невідомими

[illegible]

При розв'язанні цієї системи будемо вважати, що усі маси коливаються з однією частотою при одній початковій фазі, але з різними амплітудами:

$$v_i = A_i \cdot \sin(\omega t + \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (130)$$

$$\ddot{v}_i = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (131)$$

При підстановці (130), (131) в систему диференціальних рівнянь (129) усі члени цих рівнянь містять множник $\sin(\omega t + \lambda)$, на який їх можна скоротити.

Поділивши після цього усі члени рівнянь на ω^2 та зводячи подібні, приходимо до системи лінійних однорідних рівнянь:

[illegible]

Оскільки $A_i \neq 0$, розв'язок одержаної системи знаходимо з умови рівності нулю визначника системи рівнянь (132):

$$\left| \begin{array}{ccc} (m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}) & m_2\delta_{12} & \dots m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}) & \dots m_n\delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots (m_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2}) \end{array} \right| = 0. \quad (133)$$

Розкриваючи визначник, одержимо *рівняння частот* або *вікове рівняння*.

Воно є рівнянням степені n відносно $\frac{1}{\omega^2}$. Усі n коренів рівняння – дійсні

додатні числа, кожному з яких відповідає своє значення частоти. Кількість частот дорівнює числу ступенів вільності системи.

Частотам дають числовий індекс у порядку зростання

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_n. \quad (134)$$

Цей ряд частот (134) називають *спектром частот*. Найменша з них – ω_1 називається *основною* або *частотою основного тону коливань*. Інші частоти називають *гармоніками*.

Для кожної частоти ω_j можна записати розв’язок диференціальних рівнянь (129) у такому вигляді

$$v_{ij} = A_{ij} \sin(\omega_j t + \lambda_j). \quad (135)$$

Це рівняння визначає j -е головне коливання системи з частотою ω_j і початковою фазою λ_j та може бути записане для кожної координати v_i . Отже, якщо система здійснює одне з головних коливань, усі маси рухаються з однією частотою і початковою фазою. Такі коливання у балці супроводжуються так званими стоячими хвилями, які визначають її конфігурацію.

Розв’язок (135), що відповідає власним частотам, є частинним рішенням. Оскільки рівняння лінійні, *загальний розв’язок* можна одержати застосовуючи принцип суперпозиції:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{1n} \sin(\omega_n t + \lambda_n), \\ v_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{2n} \sin(\omega_n t + \lambda_n), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Головні коливання можна одержати лише за спеціально підібраних початкових умов, а у загальному випадку коливання являють собою комбінацію головних коливань і мають складний характер.

Відповідно до (135) відношення переміщень при головних коливаннях в процесі руху залишаються постійним і дорівнюють відношенню амплітуд. Це відношення амплітуд для j -ї власної частоти

$$A_{1j} : A_{2j} : \dots : A_{nj} \quad (136)$$

називають j -ю власною формою. Поділивши цей ряд на амплітуду першого переміщення, одержимо інший вигляд j -ї власної форми:

$$\mu_{1j} : \mu_{2j} : \dots : \mu_{nj}, \quad (137)$$

де

$$\mu_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{1j}} \quad (138)$$

– коефіцієнти j -ї власної форми коливань. Відзначимо, що $\mu_{1j} = 1$.

За аналогією з частотами перша форма коливань, що відповідає основній частоті, називається *основною*.

Покажемо важливу властивість власних форм – їх ортогональність. Сили інерції, що відповідають переміщенням мас, визначається виразом (103) і для j -го головного коливання будуть такими:

$$I_{ij} = -m_i \ddot{v}_{ij} = m_i A_{ij} \omega_j^2 \sin(\omega_j t + \lambda_j),$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (139)$$

Аналогічно для k -го головного коливання

$$I_{ik} = -m_i \ddot{v}_{ik} = m_i A_{ik} \omega_k^2 \sin(\omega_k t + \lambda_k),$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (140)$$

Під дією сил інерції та сил пружності система при головних коливаннях кожного моменту часу знаходиться «у рівновазі». Тому переміщення v_{ij} та v_{ik} можна розглядати як статичні переміщення від сил інерції, відповідно I_{ij} та I_{ik} . Тоді, застосовуючи теорему про взаємність робіт Бетті, можна записати

$$\sum_{i=1}^n I_{ij} v_{ik} = \sum_{i=1}^n I_{ik} v_{ij}$$

або після підстановки (139) и (140) та скорочення на тригонометричні функції:

$$\omega_j^2 \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = \omega_k^2 \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik}.$$

Звідси одержимо

$$(\omega_j^2 - \omega_k^2) \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0.$$

Якщо власні частоти різняться, $(\omega_j^2 - \omega_k^2) \neq 0$, отже

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0. \quad (141)$$

Одержане співвідношення виражає властивість ортогональності власних форм, які відповідають двом різним частотам.

У розгорнутому вигляді воно буде таким:

$$m_1 A_{1j} A_{1k} + m_2 A_{2j} A_{2k} + \dots + m_n A_{nj} A_{nk} = 0. \quad (142)$$

Якщо усі члени цього рівняння поділити на добуток $A_{1j} A_{1k}$, одержимо умову ортогональності в іншому вигляді:

$$m_1 + m_2 \mu_{2j} \mu_{2k} + m_3 \mu_{3j} \mu_{3k} + \dots + m_n \mu_{nj} \mu_{nk} = 0. \quad (143)$$

Запитання для самоконтролю

1. Як одержують рівняння частот?
2. Скільки розв'язків має рівняння частот?
3. Що таке спектр частот?
4. Що таке основна частота або частота основного тону?
5. Що таке головне коливання? При яких умовах його можна одержати?
6. Що таке власна форма коливань?
7. Яка форма коливань називається основною?
8. Яку властивість мають власні форми коливань?

3.4 Вимушені коливання систем з одним ступенем. Вільності

Вимушеними називаються коливання, що відбуваються під дією збуджуючої сили.

3.4.1 Рівняння руху. Частинні випадки збуджуючого навантаження

При відсутності опору рівняння (107) для випадку вимушених коливань приймає такий вид:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v = \frac{F(t)}{m}$$

або з урахуванням позначення (108)

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{F(t)}{m}. \quad (144)$$

Розв'язок цього рівняння складається із загального розв'язку однорідного рівняння (109) та частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$v = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + V(t). \quad (145)$$

Знайдемо розв'язок для деяких частинних випадків навантаження, причому для простоти як і раніше будемо вважати, що збуджуюча сила $F(t)$ прикладена до маси.

Розглянемо дію сили $F(t)$, *раптово прикладеної до маси* і потім такою, що залишається постійною (рис. 52, а). Графік цього навантаження наведений на рисунку 52, б.

В якості частинного розв'язку візьмемо статичний прогин маси

$$V(t) = v_{cm} = \delta_{11} F.$$

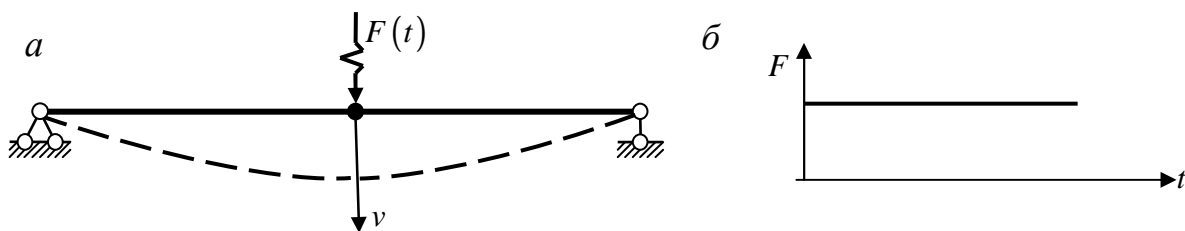


Рисунок 52

Дійсно, рівняння (144) при $v = v_{cm}$ задовольняється:

$$\ddot{v}_{cm} + \omega^2 v_{cm} = \frac{F}{m}.$$

Тут $v_{cm} = \delta_{11}F$, $\ddot{v}_{cm} = 0$, $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$.

Оскільки до прикладання навантаження система знаходилась у нерухомості, початкові умови будуть такими:

при $t = 0$ $v = 0$, $\dot{v} = 0$.

З першої умови знаходимо $A_1 = -v_{ct}$.

Записуючи похідну розв'язку (145):

$$\dot{v} = -A_1\omega \sin \omega t + A_2\omega \cos \omega t,$$

з другої початкової умови одержуємо $A_2 = 0$.

Отже, розв'язок (145) для цього випадку навантаження набуває такого вигляду:

$$v = -v_{ct} \cos \omega t + v_{ct} = v_{cm}(1 - \cos \omega t). \quad (146)$$

Графік цієї залежності наведено на рисунку 53. З нього видно, що коливання відбуваються за гармонічним законом навколо положення статичної рівноваги, а їхня амплітуда становить $v_{max} = 2v_{cm}$.

Розглянемо випадок дії імпульсного (ударного) навантаження (рис. 54).

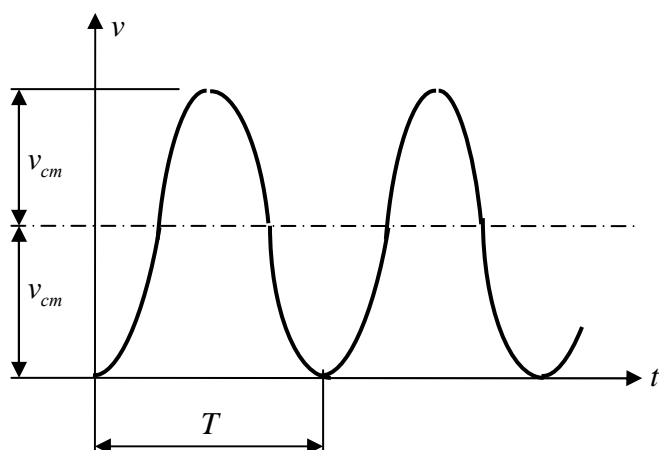


Рисунок 53

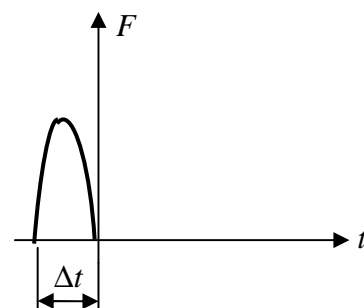


Рисунок 54

Форма імпульсу (закон зміни сили $F(t)$) може бути різним, величина

$$S = \int_{-\Delta t}^0 F(t) dt \quad (147)$$

називається *імпульсом сили*. Тут з урахуванням малих Δt для зручності вважається, що відрахування часу починається після закінчення дії імпульсу.

Відповідно до теореми про зміну кількості руху

$$m \cdot \Delta \dot{v} = S. \quad (148)$$

Після дії імпульсу збуджуюче навантаження відсутнє і система здійснює вільні коливання, що відповідають співвідношенням (110). До удару швидкість маси дорівнювала нулю: $\dot{v}_0 = 0$, отже, приріст швидкості $\Delta \dot{v} = \dot{v}_0$, тобто дорівнює швидкості після удару. За час удару переміщення маси практично не змінилось і $v_0 = 0$.

Тоді з (148) випливає $\dot{v}_0 = \frac{S}{m}$, з (105) $\lambda = 0$, а з (147) $A = \frac{\dot{v}_0}{\omega} = \frac{S}{m\omega}$. Отже, відповідно до (143), рух системи, викликаний дією імпульсу, замальовується таким виразом:

$$v = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t. \quad (149)$$

Ще раз відзначимо, що навантаження можна вважати імпульсним лише у тому випадку, коли час дії навантаження Δt малий порівняно з періодом власних коливань.

3.4.2 Вимушені коливання при дії періодичного збуджуючого навантаження

Розглянемо випадок дії збуджуючої сили, яка змінюється за гармонічним законом

$$F(t) = F \sin \theta t.$$

При відсутності опору диференціальне рівняння коливань набуває такого вигляду:

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{F}{m} \sin \theta t. \quad (150)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння відповідає вільним коливанням

$$v_1 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad (151)$$

а частинний розв'язок неоднорідного рівняння (150) будемо шукати у такому вигляді:

$$v_2 = C \sin \theta t. \quad (152)$$

Підставляючи v_2 відповідно до (152) та його похідну $\dot{v}_2 = -C\theta^2 \sin \theta t$ в (150), одержимо:

$$-C\theta^2 \sin \theta t + \omega^2 C \sin \theta t = \frac{F}{m} \sin \theta t.$$

Звідси

$$C = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F}{m\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]}$$

або, з урахуванням $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$ та $v_{cm} = F\delta_{11}$, маємо

$$C = \frac{Fm\delta_{11}}{m \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{v_{ct}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2}.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок рівняння (150):

$$v = v_1 + v_2 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \frac{v_{ct}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} \sin \theta t. \quad (153)$$

Отже, вимушені коливання на відміну від вільних не є гармонічними.

Нехай у початковий момент часу при $t = 0$ $v_0 = 0$ і $\dot{v}_0 = 0$. Тоді з першої умови випливає $A_1 = 0$.

Записуючи похідну переміщення (швидкість):

$$\dot{v} = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t + \frac{v_{ct}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} \theta \cos \theta t, \quad (154)$$

з другої умови знаходимо

$$A_2 = -v_{ct} \frac{\theta}{\omega} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2}. \quad (155)$$

Тепер вираз для переміщення (153) набуває такого вигляду:

$$v = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (156)$$

Отже, вимушені коливання відбуваються накладанням коливань з частотою збуджуючого навантаження θ на коливання з власною частотою ω (рис. 55).

Другий доданок у дужках (156) являє собою вільні коливання. Оскільки в реальних умовах завжди присутні сили опору, вільні коливання є згасаючими. Тому для практичних цілей їх можна не враховувати і приймати такими, що відповідають наступній залежності:

$$v = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t. \quad (157)$$

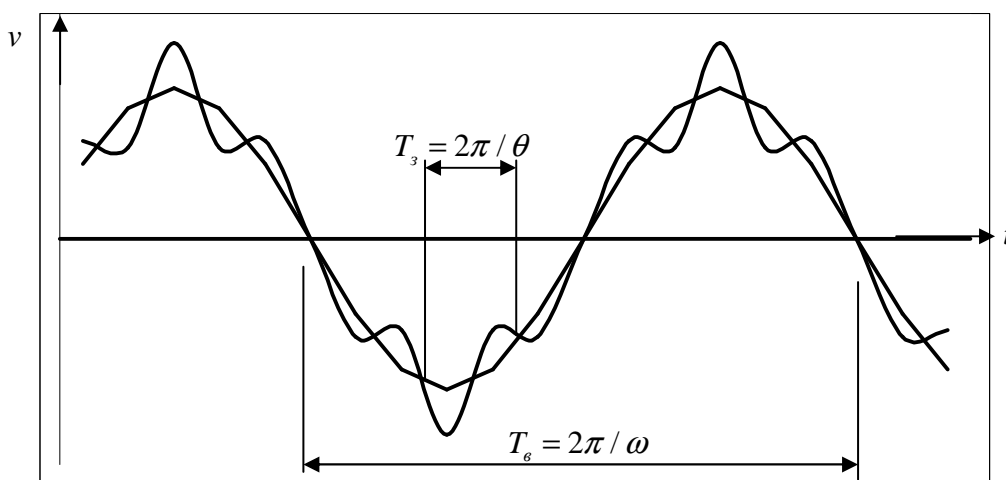


Рисунок 55

Амплітуда таких коливань буде такою:

$$v_{max} = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (158)$$

При $\frac{\theta}{\omega} \rightarrow 1$ $v_{max} \rightarrow \infty$. Таке явище, коли при збігу частоти збуджуючого навантаження з частотою власних коливань амплітуда зростає до нескінченності, називається *резонансом*.

3.4.3 Зусилля від динамічних впливів. Динамічний коефіцієнт

Головною метою динамічного розрахунку є визначення зусиль, які виникають при коливаннях системи. Один із способів такого розрахунку, що ґрунтується на використанні принципу незалежності дії сил, полягає в наступному: після визначення прискорення маси \ddot{v} знаходять сили інерції; далі найбільші зусилля від динамічного навантаження одержують як суму зусиль від

статичної дії амплітудного значення збуджуючого навантаження та від дії амплітудної сили інерції. Наприклад, для згинаючих моментів одержимо:

$$M_d = M_{ст} + \overline{M} I, \quad (159)$$

де \overline{M} – моменти від одиничної сили, прикладеної до маси.

Для визначення повних зусиль до зусиль від динамічної дії необхідно додати зусилля від сили ваги маси.

Оцінка динамічної дії може бути виконана за допомогою *динамічного коефіцієнта (коефіцієнта динамічності)* μ . Цей коефіцієнт являє собою відношення максимального значення величини при динамічному впливі до значення цієї величини при статичній дії відповідного збуджуючого навантаження.

Зазначимо, що величина динамічного коефіцієнту у загальному випадку буде різною при визначенні його для переміщень, згинаючих моментів та інших факторів. Однаковим значення μ буде лише у тому випадку, коли збуджуюче навантаження прикладене безпосередньо до маси. Зокрема, для розглянутих вище випадків дії навантаження одержимо: *при раптово прикладеній силі* (див. п. 3.4.1)

$$\mu = \frac{v_{max}}{v_{ст}} = 2, \quad (160)$$

при дії гармонічної сили (див. п. 3.4.2)

$$\mu = \frac{v_{max}}{v_{ст}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (161)$$

В останньому випадку при наближенні до резонансу μ зростає до нескінченності, а потім, при віддаленні від нього при $\frac{\theta}{\omega} > 1$ зменшується (рис. 56).

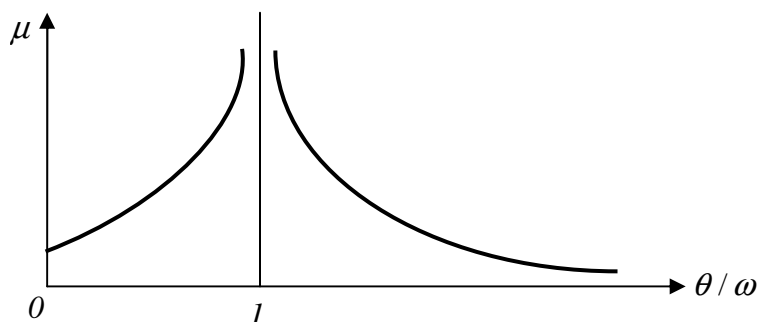


Рисунок 56

Зазначимо, що за умови врахування сил опору динамічний коефіцієнт при $\frac{\theta}{\omega}=1$ має скінченне значення. Але навіть при значному опорі при віддаленні $\frac{\theta}{\omega}$ від одиниці величина μ наближається до значення (161), яке відповідає відсутності опору. У зв'язку з цим в практичних розрахунках, як правило, для визначення динамічного коефіцієнта при дії гармонічного навантаження користуються виразом (161).

Запитання для самоконтролю

1. Що таке вимушені коливання?
2. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань?
3. Що називається імпульсом сили?
4. Які коливання здійснює система після закінчення дії імпульсу?
5. Який характер мають вимушені коливання при дії гармонічного навантаження?
6. Що таке резонанс? Чому в конструкціях неможна допускати появлення резонансу?

3.5 Вимушені коливання систем зі скінченим числом ступенів вільності

3.5.1 Коливання при дії гармонічного навантаження

При дослідженні вільних коливань системи без опору одержані вирази (129) для переміщень мас під дією сил інерції у такому вигляді:

$$v_i(t) = -\sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{v}_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При дії на систему збуджуючих навантажень $F_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$ до переміщень від інерційних сил (праві частини рівнянь (129)) додаються переміщення від зовнішнього навантаження $\Delta_{if}(t)$. Переносячи переміщення від сил інерції в ліву частину, одержуємо

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (162)$$

Розглянемо випадок, коли збуджуючі навантаження змінюються за гармонічним законом $F_j(t) = F_j \sin \theta t$. Полягаючи, що частота коливань θ усіх

СИЛ ОДНАКОВА, МАЄМО:

$$\Delta_{if}(t) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} F_j(t) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} F_j \sin \theta t$$

або

$$\Delta_{if}(t) = \Delta_{if} \sin \theta t, \quad (163)$$

де Δ_{if} – переміщення вздовж i -го напрямку, викликане статичною дією усіх збуджуючих навантажень.

Розв'язок неоднорідних диференціальних рівнянь (162) можна одержати як суму загального розв'язку однорідних рівнянь та частинного розв'язку неоднорідних рівнянь:

$$v_i(t) = v_{i1}(t) + v_{i2}(t).$$

Однорідні рівняння – це рівняння, які змальовують вільні коливання системи. Оскільки при коливаннях завжди присутні непружні сили опору, вільні коливання є швидко згасаючими. У зв'язку з цим загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна замінити його частинним розв'язком:

$$v_i(t) = v_{i2}(t).$$

Будемо шукати цей розв'язок у такому вигляді:

$$v_i(t) = v_i \sin \theta t, \quad (164)$$

де v_i – амплітудні переміщення i -ї маси.

Тоді

$$\ddot{v}_i(t) = -v_i \theta^2 \sin \theta t = -\theta^2 v_i(t) \quad (165)$$

Підставляючи (163), (164), (165) у рівняння (162), після скорочення на загальний множник $\sin \theta t$ одержимо:

$$v_i - \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \theta^2 v_k = \Delta_{if}, \quad i=1,2,\dots,n.$$

У розгорнутому вигляді ці рівняння можна записати так:

[illegible]

Одержані рівняння є рівняннями відносно амплітуд v_i переміщень мас. Визначник системи (166)

$$D = (\theta^2)^n \left| \begin{array}{cccc} m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\theta^2} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\theta^2} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} - \frac{1}{\theta^2} \end{array} \right| \quad (167)$$

з точністю до множника $(\theta^2)^n$ співпадає з визначником (133) системи рівнянь вільних коливань. Звідси випливає, що при збігу θ з однією з власних частот ω_i визначник (167) обертається на нуль і амплітуди переміщень v_i стають нескінченними – настає резонанс.

Як і у випадку системи з одним ступенем вільності, при урахуванні сил опору амплітуди v_i у зоні резонансу не обертаються на нескінченність, але можуть досягати великих значень.

Рівняння (166) можна записати у іншому вигляді, якщо врахувати, що

$$I_i(t) = -m_i \ddot{v}_i(t) = m_i \theta^2 v_i(t)$$

та амплітудні значення сил інерції такі:

$$I_i = m_i \theta^2 v_i.$$

Звідси $v_i = \frac{I_i}{m_i \theta^2}$, і рівняння (166) набувають такого вигляду:

[illegible]

де

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}. \quad (169)$$

Розв'язок рівнянь (168) дає значення I_i амплітуд інерційних сил. Після їх визначення веоичини найбільших динамічних зусиль неважко знайти, використовуючи принцип суперпозиції. Зокрема, для згинаючих моментів дійсне співвідношення

$$M_{\partial} = \overline{M}_1 I_1 + \overline{M}_2 I_2 + \dots + \overline{M}_n I_n + M_f, \quad (170)$$

де M_i – згинаючі моменти від одиничних сил F_i , прикладених до мас; M_f – згинаючий момент від статичної дії збуджуючого навантаження.

Для того,щоб одержати повні значення зусиль, необхідно до знайдених найбільших динамічних зусиль необхідно додати зусилля від сил ваги.

3.5.2 Загальний випадок дії збуджуючого навантаження. Розкладання за формами вільних коливань

У загальному випадку дії збуджуючого навантаження для знаходження частинного розв'язку може бути застосований *метод розкладання за власними формами коливань*. Він використовується тоді, коли відомі власні частоти і форми вільних коливань.

Подамо вектор узагальнених координат $v(t)$ у вигляді лінійної комбінації власних векторів μ_k :

$$v(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \mu_k$$

або в розгорнутому вигляді

$$v_i(t) = \varphi_1(t) \mu_{i1} + \varphi_2(t) \mu_{i2} + \dots + \varphi_n(t) \mu_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (171)$$

Тут $\varphi_i(t)$ – деякі функції, що підлягають визначенню функції часу;

$$\mu_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{2k} \\ \mu_{3k} \\ \vdots \\ \mu_{nk} \end{pmatrix} \text{ – вектор } k\text{-ї власної форми коливань (137).}$$

Функції $\varphi_k(t)$ визначають положення мас у будь-який момент часу, тому їх можна розглядати як нові узагальнені координати, що називаються *головними*. Якщо усі ці координати, крім однієї, наприклад $\varphi_k(t)$, дорівнюють нулю, одержимо k -у власну форму. Дійсно,

$$v_i(t) = \varphi_k(t) \mu_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{і } v_1 : v_2 : \dots : v_n = \mu_{1k} : \mu_{2k} : \dots : \mu_{nk}.$$

Отже, за (171), рух системи подається у вигляді лінійної комбінації головних переміщень.

Підставляючи $v_i(t)$ з (171) у рівняння (162) одержуємо

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \mu_{ij} + \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \sum_{j=1}^n \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{kj} = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

або

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{kj} + \varphi_j(t) \mu_{kj} \right] = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (172)$$

Останнє співвідношення можна записати в матричній формі:

$$\sum_{j=1}^n \left[\ddot{\varphi}_j(t) C \mu_j + \varphi_j(t) E \mu_j \right] = \Delta(t), \quad (173)$$

де

$$C = \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} & m_2 \delta_{12} \dots m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} \dots m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} \dots m_n \delta_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \Delta_{1f}(t) \\ \Delta_{2f}(t) \\ \dots \\ \Delta_{nf}(t) \end{vmatrix} - \text{вектор переміщень мас від збуджуючого навантаження}$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} - \text{одинична матриця розміром } n \times n.$$

Як випливає з (132), для кожної j -ї власної форми коливань дійсне співвідношення

$$\mu_j = \omega_j^2 C \mu_j. \quad (174)$$

Тоді (173) набуває такого вигляду:

$$\sum_{j=1}^n [\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t)] C \mu_j = \Delta(t)$$

або

$$\sum_{j=1}^n [\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t)] \frac{1}{\omega_j^2} \mu_j = \Delta(t). \quad (175)$$

Помножимо обидві частини (175) скалярно на $M \mu_k$ (M – діагональна матриця мас, елементами головної діагоналі якої є маси, а інші – нулі) і врахуємо, що внаслідок ортогональності форм власних коливань в лівій частині усі складові з різними індексами j і k обернуться на нуль. Тоді приходимо до наступної системи рівнянь:

$$\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t) = \omega_j^2 b_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (176)$$

де

$$b_j(t) = \frac{\Delta_{1f}(t) m_1 \mu_{1j} + \Delta_{2f}(t) m_2 \mu_{2j} + \dots + \Delta_{nf}(t) m_n \mu_{nj}}{m_1 \mu_{1j}^2 + m_2 \mu_{2j}^2 + \dots + m_n \mu_{nj}^2}. \quad (177)$$

Після визначення з рівнянь (176) головних координат $\varphi_j(t)$ знаходимо сили інерції

$$I_j(t) = -m_j \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{jk}$$

і, далі, зусилля в системі.

3.5.3 Кінематичне збудження коливань. Розрахунок на сейсмічні впливи

Коливання споруди можуть бути викликані не лише навантаженням, що змінюється за часом, а й переміщеннями основи. Прикладами можуть бути коливання, викликані рухом земної кори при землетрусах, коливання підресорених частин автомобілів при пересуванні нерівною дорогою та ін.

Розглянемо коливання будівлі (рис. 57, а) при землетрусі. Оскільки вертикальна жорсткість будівлі зазвичай суттєво більше горизонтальної, будемо розглядати поведінку будови при горизонтальному переміщенні основи $v_0(t)$. Маса перекриттів значно перевищує масу стін, тому в якості розрахункової схеми приймемо невагому консоль з точковими масами, розташованими в рівні перекриттів та покрівлі (рис. 57, б). Жорсткість консолі EI приймемо еквівалентною горизонтальній жорсткості будівлі.

Коливання мас відбуваються при відсутності збуджуючого навантаження і можуть бути відображені рівняннями, аналогічними (129). Подамо їх у такому вигляді:

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_{ks}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (178)$$

де

$$v_{ks}(t) = v_0(t) + v_k(t) \quad (179)$$

— повне переміщення k -ї маси, яке визначається як сума переміщення основи v_0 та прогину консолі v_k (рис. 57, в).

Підставляючи переміщення (179) у (178), одержимо:

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} [\ddot{v}_0(t) + \ddot{v}_k(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{або} \quad v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) + \ddot{v}_0(t) \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (180)$$

Останній доданок тут можна розглядати як деяке переміщення:

$$\Delta_{i_0}(t) = \ddot{v}_0(t) \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (181)$$

Тепер рівняння (178) набувають вигляду, аналогічного (162):

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) + \Delta_{i3}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (182)$$

і можуть бути розв'язані, наприклад, методом розкладання за власними формами коливань.

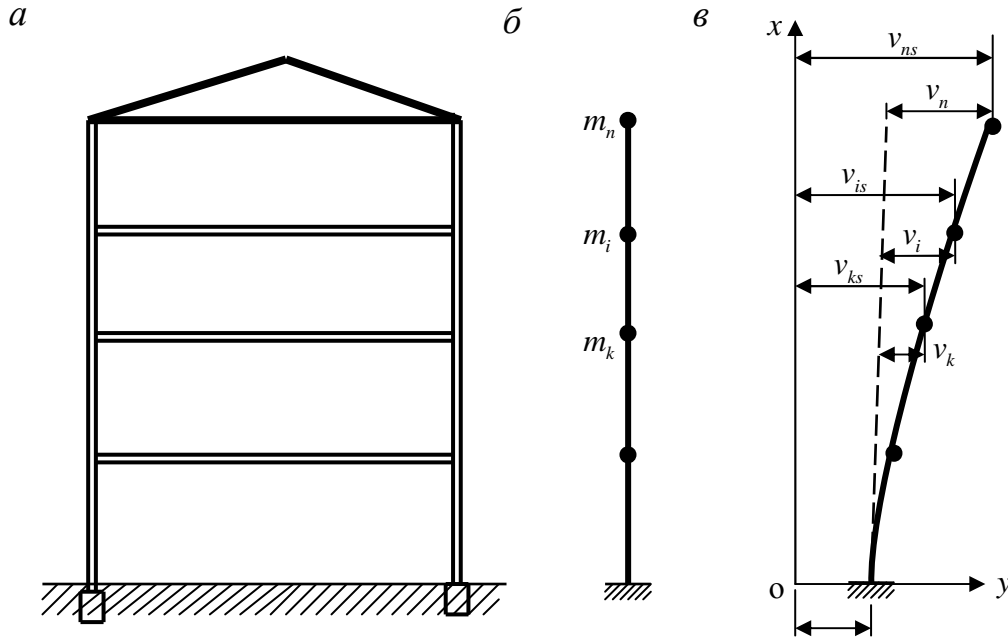


Рисунок 57

Запитання для самоконтролю

1. Яке навантаження називається гармонічним?
2. Як змінюється вирази для переміщень мас при дії збуджуючого навантаження порівняно з виразами для вільних коливань?
3. Як показати, що для систем зі скінченним числом ступенів вільності резонанс настає при збігу частоти збуджуючого навантаження з будь-якою з власних частот системи?
4. Якого вигляду набувають рівняння відносно амплітуд інерційних сил при періодичному навантаженні?
5. Як визначаються зусилля від динамічного впливу?
6. Який вид має вектор узагальнених переміщень в методі розкладання за власними формами коливань?
7. Яку розрахункову схему будівлі приймають при розрахунку на сейсмічні впливи?
8. Які співвідношення використовують для одержання рівнянь переміщень мас при сейсмічних впливах?

Список джерел

1. **Баженов В. А.** Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
2. **Шутенко Л. М.,** Будівельна механіка. Конспект лекцій для студентів 3-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – «Будівництво». Л. М Шутенко, В. П. Шпачук, М. А. Засядько. - Харків, ХНАМГ, 2012. – 169 с.
3. **Шпачук В. П.** Будівельна механіка/ Спецкурс. Конспект лекцій для студентів 3-4-го курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом . 6.060101 – «Будівництво». В. П. Шпачук, М. А. Засядько. - Харків, ХНУМГ, 2013. – 64 с.
4. **Шутенко Л. М.** Механіка споруд. Л. М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А.Засядько. – Харків, ХДАМГ, 2001. – 234 с.
5. **Шутенко Л. Н.** Строительная механика: Краткий курс / Раздел 1. Статически определимые системы. Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько. – Харьков, ХГАГХ, 2003. – 90 с.
6. **Строительная механика.** Под ред. Ю. И. Бутенко. – К.: Вища школа, 1989. – 479 с.
7. **Строительная механика.** Стержневые системы: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лещеников, Н. Н. Шапошников; Под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
8. **Строительная механика.** Общий курс: Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
9. **В.А.Баженов.** Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2010.
10. **Чихладзе Э. Д.** Строительная механика: Учебник для студентов высших учебных заведений. – Харьков: УкрГАЗТ, 2004. - 305 с.
11. **Соппротивление материалов.** Под общей ред. Акад. АН УССР Г. С. Писаренко. - К.: Вища школа, 1973, 672 с.

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович
ЗАСЯДЬКО Микола Андрійович

Конспект лекцій
з курсу

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Спецкурс

Частина 2

*(для студентів 4-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.060101 – Будівництво)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2015, поз. 64 Л

Підп. до друку 26.11.2015
Друк на ризографі
Тираж 50 пр.

Формат 60*84/16
Ум. друк. арк. 7,2
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.